

**ΘΕΜΑ 1**

Θεωρούμε την ακολουθία  $(a_n)$  των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η  $(a_n)$  είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2**

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει  $a$  καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής πρόοδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 3**

α) Να βρείτε το άθροισμα των  $n$  πρώτων διαδοχικών θετικών ακέραιων 1,2,3,... $n$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 4**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με όρους  $a_2 = 0$  ,  $a_4 = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\omega = 2$  και  $a_1 = -2$ , όπου  $\omega$  είναι η διαφορά της πρόοδου και  $a_1$  ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο  $n$ -οστός όρος της πρόοδου είναι ίσος με  $a_n = 2n - 4$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , και να βρείτε ποιος όρος της πρόοδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 5**

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $x$  ώστε οι αριθμοί :  $x + 2$  ,  $(x + 1)^2$  ,  $3x + 2$  με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i)  $x = 1$

ii)  $x = -1$ .

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 6**

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της  $n$ -οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 7**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  για την οποία ισχύει ότι:  $a_1 = 19$  και  $a_{10} - a_6 = 24$  .

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι  $\omega = 6$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον  $a_{20}$  .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 8**

Οι αριθμοί  $A = 1$  ,  $B = x + 4$  ,  $\Gamma = x + 8$  είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ .

α) Να βρείτε τη τιμή του  $x$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν  $x = 1$  και ο αριθμός  $A$  είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$ ,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά  $\omega$ .

(Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 9**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$ , (1) με παράμετρο  $\beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:  $x_1 = \beta - 2$  και  $x_2 = \beta + 2$   
(Μονάδες 12)

β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $x_1, \beta, x_2$ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής πρόοδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.  
(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 10**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  για την οποία ισχύει:  $a_4 - a_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της πρόοδου είναι  $\omega = 5$ .  
(Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της πρόοδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της πρόοδου.  
(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 11**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με  $a_1 = 1$  και  $a_3 = 9$ .

α) Να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  της αριθμητικής πρόοδου.  
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο  $n$ , ώστε να ισχύει  $a_n > 30$ .  
(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 12**

Σε μία αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  ισχύουν:  $a_1 = 2$  και  $a_{25} = a_{12} + 39$ .

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της πρόοδου είναι  $\omega = 3$ .  
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιος όρος της πρόοδου είναι ίσος με 152.  
(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 13**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με διαφορά  $\omega$ .

α) Να δείξετε ότι:  $\frac{a_{15} - a_9}{a_{10} - a_7} = 2$ .  
(Μονάδες 13)

β) Αν  $a_{15} - a_9 = 18$ , να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  της πρόοδου.  
(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 14**

Σε αριθμητική πρόοδο  $(a_n)$  ισχύουν:  $a_4 - a_9 = 15$  και  $a_1 = 41$ .

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά  $\omega$  της προόδου είναι ίση με  $-3$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο  $n$ , ώστε  $a_n = n$ .

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 15**

Σε αριθμητική πρόοδο  $(a_n)$  με διαφορά  $\omega = 4$ , ισχύει:  $a_6 + a_{11} = 40$ .

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο  $a_1$  της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 16**

Οι αριθμοί  $x + 6$ ,  $5x + 2$ ,  $11x - 6$  είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο  $a_1$  και διαφορά  $\omega$ .

α) Να βρείτε την τιμή του  $x$  και να αποδείξετε ότι  $\omega = 4$ .

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι  $a_1 = 0$ , να υπολογίσετε το άθροισμα  $S_8$  των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 17**

Σε αριθμητική πρόοδο  $(a_n)$  είναι  $a_1 = 2$  και  $a_5 = 14$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\omega = 3$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Μονάδες 13)

(Δίνεται:  $\sqrt{1849} = 43$ ).

**ΘΕΜΑ 18**

Σε γεωμετρική πρόοδο  $(a_n)$  με θετικό λόγο  $\lambda$ , ισχύει:  $a_3 = 1$  και  $a_5 = 4$ .

α) Να βρείτε το λόγο  $\lambda$  της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο  $n$ -οστός όρος της προόδου είναι:

$$a_n = 2^{n-3}.$$

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 19**

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $x$  ώστε οι αριθμοί:  $x$ ,  $2x + 1$ ,  $5x + 4$ , με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο  $\lambda$  της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i)  $x = 1$

ii)  $x = -1$

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 20**

α) Αν οι αριθμοί  $4 - x$ ,  $x$ ,  $2$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό  $x$ .

(Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί  $4 - x$ ,  $x$ ,  $2$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό  $x$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός  $x$  ώστε οι αριθμοί  $4 - x$ ,  $x$ ,  $2$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 21**

Δίνεται η εξίσωση:  $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$  (1), με παράμετρο  $\beta > 0$ .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:  $x_1 = 2\beta$  και  $x_2 = \frac{\beta}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Αν  $x_1$ ,  $x_2$  είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $x_1$ ,  $\beta$ ,  $x_2$ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 22**

Οι αριθμοί  $k - 2$ ,  $2k$  και  $7k + 4$ ,  $k \in \mathbb{N}$  είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου  $(a_n)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $k = 4$  και να βρείτε το λόγο  $\lambda$  της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το  $2^\circ$  όρο, τον  $5^\circ$  και τον  $4^\circ$  όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του  $a_1$ .

(Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι  $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 23**

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του  $x$ , οι αριθμοί  $x + 4$ ,  $2 - x$ ,  $6 - x$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν  $x = 5$  και ο  $6 - x$  είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε  
i) το λόγο  $\lambda$  της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο  $a_1$  της προόδου.

(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 24**

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος  $(a_n)$ , για την οποία ισχύει  $\frac{a_5}{a_2} = 27$ .

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι  $\lambda = 3$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο  $a_1$ .

(Μονάδες 15)