

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2020
ΘΕΜΑ Α:

A.1] Απόδειξη θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών (4^η απόδειξη ύλης)

A.2] Ορισμός

A.3]

α) ΨΕΥΔΗΣ

β) π.χ. η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ωστόσο $f'(0)=0$ αφού $f'(x)=3x^2$

A.4] α) Λ β) Σ γ) Σ γιατί είναι άρτια $f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x)$ με $A_f=\mathbb{R}$

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β:

$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, με $x-1 \neq 0$ δηλ $x \neq 1$ με περιορισμένο $A_f = (1, +\infty)$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = e^x$

B.1] $f \circ g(x) = f(g(x))$

εύρεση του Π.Ο της σύνθεσης

$$\left. \begin{array}{l} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \ln e^x > \ln 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{array} \right\} A_{f \circ g} = (0, +\infty)$$

ο τύπος της σύνθεσης $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

$$\text{B.2]} \forall x_1, x_2 \in A_{f \circ g} \text{ με } f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Leftrightarrow$$

$$(e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 2) \Leftrightarrow e^{x_1 x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1 x_2} + 2e^{x_1} - e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow$$

$$3e^{x_2} = 3e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η $f \circ g$ είναι '1-1'

οπότε η $f \circ g$ αντιστρέφεται:

$$\begin{aligned} \text{Θέτω } f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y(e^x - 1) \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \\ &\Leftrightarrow e^x - ye^x = -y - 2 \Leftrightarrow e^x(1 - y) = -y - 2 \Leftrightarrow e^x(y - 1) = y + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \\ &\Leftrightarrow \ln e^x = \ln \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y + 2}{y - 1} \end{aligned}$$

επίσης λόγω πεδίου ορισμού πρέπει $x > 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ln \frac{y + 2}{y - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{y + 2}{y - 1} > e^0 \Leftrightarrow \frac{y + 2}{y - 1} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y + 2}{y - 1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y + 2 - y + 1}{y - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{y - 1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1 \end{aligned}$$

$$\text{οπότε } f \circ g^{-1}(x) = \ln \frac{x + 2}{x - 1} \text{ με } x > 1$$

$$\text{B.3]} \text{ Η } \phi \text{ συνεχής και παραγωγίσιμη με } \phi'(x) = \left(\ln \frac{x + 2}{x - 1} \right)' = \frac{x - 1}{x + 2} \cdot \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right)' =$$

$$\frac{x - 1}{x + 2} \cdot \frac{(x + 2)'(x - 1) - (x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1}{x + 2} \cdot \frac{x - 1 - x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1}{x + 2} \cdot \frac{-3}{(x - 1)^2} =$$

$$\frac{-3}{(x + 2)(x - 1)} < 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \quad \underline{\text{άρα η } \phi \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}} \searrow \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

B.4]

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) **$$

$$(\text{θέτω } u = \frac{x+2}{x-1} \quad \mu\epsilon \lim_{x \rightarrow 1^+} u = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty)$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad ** \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) ** \quad \text{θέτω } u = \frac{x+2}{x-1} \quad \mu\epsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 1$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad ** \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ.1] Η f είναι συνεχής άρα συνεχής και στο $x_0=0$ που είναι σημείο αλλαγής των κλάδων

οπότε τα πλευρικά όρια στο 0 και η τιμή $f(0)$, είναι μεταξύ τους, όλα ίσα.

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \lambda = 1 - \ln \lambda$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = \eta \mu 0 + \lambda \sigma \upsilon \nu 0 = 0 + \lambda \cdot 1 = \lambda$

$$\text{επίσης } f(0) = 1 - \ln \lambda$$

οπότε πρέπει $1 - \ln \lambda = \lambda \Rightarrow \lambda + \ln \lambda - 1 = 0$ με προφανή ρίζα το $\lambda = 1$

Θεωρώ συνάρτηση $k(\lambda) = \lambda + \ln \lambda - 1$ με $k'(\lambda) = 1 + \frac{1}{\lambda} > 0$ αφού $\lambda > 0$

άρα η $k(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η $\lambda=1$ είναι και η μοναδική ρίζα

Γ.2]

Αρκεί να βρούμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

και ν.δ.ο $f'(0) = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$

για $\lambda=1$ η f είναι η εξής:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \geq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, f(0)=1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1 + 0 = 1$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0)=1$, άρα υπάρχει εφαπτομένη στο σημείο $A(0,1)$ με $\lambda_\epsilon = f'(0)=1=\epsilon\phi\omega$

$$\text{οπότε } \omega = \frac{\pi}{4}$$

Γ.3] Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αλλαγής της και οι κλάδοι της ,
είναι, παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, x \leq 0 \\ \sin x - \eta \mu x, 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

εύρεση κρίσιμων σημείων:

κρίσιμα σημεία, είναι τα εσωτερικά σημεία, του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, στα οποία η παράγωγος μηδενίζει ή δεν ορίζεται. Στην συνάρτηση μας η παράγωγος ορίζεται πάντα. Άρα, αρκεί να βρούμε που μηδενίζει.

- για $x \leq 0$: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 0$, αδύνατον, η f' δεν μηδενίζει για $x \leq 0$
- για $x = 0$: $f'(0) = 1$ άρα ούτε το 0 δεν αποτελεί κρίσιμο σημείο της f
- για $x > 0$: $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x - \eta \mu x = 0 \Rightarrow \sin x = \eta \mu x \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{όμως } x \in (0, \frac{3\pi}{2}) \text{ άρα } \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1 \text{ δηλαδή } x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}$$

άρα η f παρουσιάζει κρίσιμα σημεία για $x = \frac{\pi}{4}$ το $A(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$

και για $x = \frac{5\pi}{4}$ το $B(\frac{5\pi}{4}, f(\frac{5\pi}{4}))$

$$\text{ΕΧΟΥΜΕ } A(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) \text{ ΚΑΙ } B(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$$

Γ.4] $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \leq 0$ κινείται στη C_f

αφού $\alpha \leq 0$ λόγω 1^{ου} κλάδου έχουμε ότι $M(\alpha, \frac{1}{1-\alpha})$ και η εφαπτομένη της C_f στο

$$M(\alpha, \frac{1}{1-\alpha}) \text{ είναι η ευθεία } \varepsilon: y - \frac{1}{1-\alpha} = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

η ε τέμνει τον x' στο σημείο B:

$$\text{για } y=0 \text{ έχουμε } -\frac{1}{1-\alpha} = f'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x - \alpha) \Rightarrow -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{x - \alpha}{(1-\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha} = (x - \alpha) \Rightarrow -(1-\alpha) = x - \alpha \Rightarrow -1 + \alpha = x - \alpha \Rightarrow x = 2\alpha - 1$$

$$\text{ΑΡΑ } B(2\alpha - 1, 0)$$

Συνεπώς θεωρώ τη συνάρτηση $Bx(t) = 2\alpha(t) - 1$ με $Bx'(t) = 2\alpha'(t)$

$$\text{την } t_0 \text{ έχω } Bx'(t_0) = 2\alpha'(t_0) \Rightarrow Bx'(t_0) = 2\left(-\frac{a(t_0)}{3}\right) \Rightarrow Bx'(t_0) = \frac{2}{3} \text{ m/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ:

$$\Delta.1] f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$$

η f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

$$f(0) = e^0 + 0^2 - e \cdot 0 - 1 = 0$$

$$f(1) = e^1 + 1^2 - e \cdot 1 = 0$$

οπότε από θεώρημα ROLLE υπάρχει τουλάχισ. ένα $x_0 \in (0,1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) = e^x + 2x - e \text{ άρα } f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$$

θέτω $\kappa(x) = e^x + 2x - e$ με $\kappa'(x) = e^x + 2 > 0$ άρα $\kappa \nearrow$ δηλαδή $f' \nearrow$

εύρεση συνόλου τιμών της κ (δηλ της f')

$$\kappa((0,1)) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} \kappa(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} \kappa(x)) = (1-e, 2)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x - e) = 1 - e$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x + 2x - e) = 2$

x	$-\infty$	x_0 $+\infty$
$\kappa(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών , οπότε η κ έχει ρίζα και μάλιστα μοναδική αφού η κ είναι γν. αύξουσα.

$$\text{έστω } f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1 \Rightarrow e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - e \cdot x_0 - 2x_0 + e - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0} = -2x_0 + e \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$$

που ισχύει

$$\Delta.2] \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = +\infty, \text{ αφού:}$$

- $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ από Δ.1

$$\text{άρα το } \frac{\alpha}{0} \text{ όριο } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \text{ ισούται με } +\infty$$

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, \text{ έχουμε } -1 \leq \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq 1$

Δ.3] Θέλουμε ν.δ.ο η εξίσωση $f(x)+x-x_0=0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(x_0,1)$

θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x \in [x_0,1]$

- g συνεχής στο $[x_0,1]$
- $g(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$

$$g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0 \text{ αφού } x_0<1$$

άρα από θεώρημα Bolzano, έχουμε ρ που ανήκει στο $(x_0,1)$, τέτοιο ώστε $g(\rho)=0$

επειδή $g'(x)=f'(x)+1>0$, το ρ είναι και μοναδικό καθώς η g είναι '1-1'

άρα υπάρχει μοναδικό $\rho \in (x_0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)+\rho=x_0$

Δ.4] $f(x_0)>f(\rho)(f'(\kappa)+1) \Leftrightarrow f(x_0)>(x_0-\rho)(f'(\kappa)+1) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x_0)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)+1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0-\rho} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0-\rho} - \frac{x_0-\rho}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-x_0+\rho}{x_0-\rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$$

$x_0-\rho<0$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0} < f'(\kappa) \quad (1)$$

- f συνεχής στο $[\rho, x_0]$
- f παραγωγίσιμη στο (ρ, x_0)

οπότε από Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho, x_0) \subseteq (\rho,1)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$$

$$\rho < \xi < x_0 < \kappa < 1$$

$$(1) \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \xi < \kappa \text{ που ισχύει}$$

infomath anelaxis