

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΑΛ 2020

ΘΕΜΑ Α:

A.1] ορισμός συνέχειας στο πεδίο ορισμού

A.2] α) $\wedge$ β) Σ γ) $\wedge$

A.3]

- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$

A.4] Απόδειξη της παραγώγου της $f(x)=x^2$ (3^η απόδειξη της ύλης)

ΘΕΜΑ Β:

B.1]

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100	-	-

$$f_1\% = 40 = F_1\%$$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 70 - 40 = 30$$

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 90 - 70 = 20$$

$$f_3 = 0,2 \Rightarrow \frac{v_3}{v} = 0,2 \Rightarrow \frac{10}{v} = 0,2 \Rightarrow v = 50 = N_4$$

$$f_1 = 0,4 \Rightarrow \frac{v_1}{50} = 0,4 \Rightarrow v_1 = 20 = N_1$$

$$f_2=0,3 \Rightarrow \frac{v_2}{50}=0,3 \Rightarrow v_2=15 \quad \dots \text{ κτλ....κτλ}$$

B.2] το $f_4\%=10\%$ των μαθητών

B.3] τουλάχιστον ένα βιβλίο , δηλ (1 ή 2 ή 3)

$$\text{οπότε } v_2+v_3+v_4=15+10+5=30 \text{ μαθητές}$$

B.4] το πολύ 2 βιβλία (0 ή 1 ή 2)

$$\text{οπότε } F_3\%= 90 \% \text{ των μαθητών}$$

ΘΕΜΑ Γ:

έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-\lambda x^2+2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Gamma.1] A \in C_f \Rightarrow f(-1)=-2 \Rightarrow (-1)^3-\lambda(-1)^2+2=-2 \Rightarrow -1-\lambda+2=-2 \Rightarrow -\lambda=-3 \Rightarrow \lambda=3$$

Γ.2] Για $\lambda=3$ έχουμε $f(x)=x^3-3x^2+2$ με $A_f=\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$$\text{έχουμε } f'(x)=3x^2-6x \text{ και } f''(x)=6x-6$$

Γ.3] μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων της f

$$\text{έχουμε από το } \Gamma.2 \text{ ότι } f'(x)=3x^2-6x$$

$$\text{λύνουμε την εξίσωση } f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x=2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

οπότε η f είναι γν.φθίνουσα για $x \in [0, 2]$

και η f είναι γν.αύξουσα για $x \in (-\infty, 0]$ και $x \in [2, +\infty)$

η f έχει τοπικό μέγιστο στο 0 το $f(0)=2$

η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2)=2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2$

$$\Gamma.4] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)+3}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{6(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ:

δίνεται $f(x)=(x^2+4x+5)^{20}$ με $A_f=\mathbb{R}$

$$\Delta.1] f'(x) = [(x^2+4x+5)^{20}]' = 20(x^2+4x+5)^{19} (x^2+4x+5)' = 20(x^2+4x+5)^{19} (2x+4) = 20(x^2+4x+5)^{19} (x+2) \cdot 2 = 40(x^2+4x+5)^{19} (x+2)$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 40(x^2+4x+5)^{19} (x+2)$$

$$\Delta.2] \text{ γνωρίζουμε ότι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\text{οπότε έχουμε ότι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2) = 40[(-2)^2 + 4(-2) + 5]^{19} (-2+2) = 40 \cdot 1^{19} \cdot 0 = 0$$

Δ.3] Η εφαπτομένη της c_f που είναι παράλληλη στον x' χ, σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0) = 0$.

ξέρω από Δ.2 ότι $f'(-2)=0$, πρέπει όμως να σιγουρευτούμε ότι η f' δεν έχει άλλη ρίζα, ώστε $x_0=-2$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 40(x^2+4x+5)^{19} \cdot (x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ \text{ή} \\ x^2+4x+5=0 \Rightarrow \text{αδύνατη} \end{cases}$$

αφού $\Delta < 0$

άρα ψάχνουμε την εφαπτομένη στο $M(-2, f(-2)) \Rightarrow M(-2, 1)$ αφού $f(-2)=1$

οπότε $\varepsilon: y=f'(-2)x+\beta \Rightarrow \varepsilon: y=\beta$

$$M(-2, 1) \in \varepsilon \quad \text{ΑΡΑ } \varepsilon: y=1$$

Δ.4] η απόσταση $d(A, 0)$ δίνεται από τη σχέση

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{x^2+1} \quad \text{με } A \in \mathbb{R}$$

μου ζητάνε το $d'(1)$

$$d'(x) = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{άρα } d'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$