



ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2024-----ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ

By infomath-anelixis ΚΑΡΔΙΤΣΑ
ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2 – ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΤΕΙΑ
ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ – ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

ΘΕΜΑ Α

A1 Απόδειξη σελ 31 σχολικού

A2 α) ορίσμος σελ 65 σχολικού
β) τύπος σελ 87 σχολικού

A3 α) $\wedge$ β) $\wedge$ γ) $\leq$ δ) $\leq$

ΘΕΜΑ Β : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$

B1 $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' - (3x^2)' + (5x)' + (\frac{1}{3})' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 5$
αρα $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

B2 $A_f = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$$

	$-\infty$		1	5		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+
f			$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			T.M	T.E		

$f \nearrow \forall x \in (-\infty, 1]$

$f \searrow \forall x \in [1, 5]$

$f \nearrow \forall x \in [5, +\infty)$

$$\text{T.M στο } 1 \text{ το } f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$\text{T.E στο } 5 \text{ το } f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{125}{3} - 75 + 25 + \frac{1}{3} = \frac{126}{3} - 50 = 42 - 50 = (-8)$$

B3] ψάχνω την ΕCF στο σημείο επαφής $A(0, f(0)) \rightarrow A(0, \frac{1}{3})$

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{άρα } \varepsilon: y = f'(0) \cdot x + \beta \Rightarrow \varepsilon: y = 5x + \beta$$

$$f'(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$\text{άρα } \left. \begin{array}{l} \varepsilon: y = 5x + \beta \\ A(0, \frac{1}{3}) \in \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

$$\text{οπότε } \boxed{\varepsilon: y = 5x + \frac{1}{3}}$$

$$\text{B4]} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = (12)$$

ΘΕΜΑΤ: 22, 18, 20+k, 14, 16

$v=5$, $CV=20\%$ και

$$S = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$$

$$\underline{1]} S = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) \\ &= 36 + 28 = 64 \\ x_{1,2} &= \frac{-6 \pm 8}{2} \end{aligned}$$

↗ 1
↘ -7

άρα $\textcircled{S=4}$

$$\underline{2]} CV\% = 20 \Rightarrow CV = 0,2 \Rightarrow \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{4}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Rightarrow 2|\bar{x}| = 40 \Rightarrow |\bar{x}| = 20 \Rightarrow \bar{x} = 20$$

(αδάρεια εδώ)

οι παρατηρήσεις θετικές, άρα
έχουν θετική μέση τιμή
(το $k \in \mathbb{R}$ όμως, αν είναι -500;)

$$\begin{aligned} \underline{3]} \bar{x} = 20 &\Rightarrow \frac{22 + 18 + 20 + k + 14 + 16}{5} = 20 \Rightarrow k + 90 = 100 \\ &\Rightarrow k = 100 - 90 \\ &\Rightarrow \textcircled{k=10} \end{aligned}$$

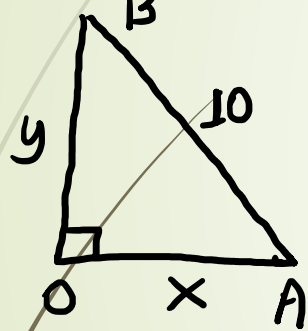
άρα οι παρατηρήσεις είναι: 22, 18, 30, 14, 16 αύξουσα
σειρά $\rightarrow$ 14, 16, 18, 22, 30 με $v=5$
άρα $\delta = t_3 \Rightarrow \textcircled{\delta=18}$

$$\underline{\Gamma 4)} \quad y_i = x_i + \frac{10}{100} \cdot x_i \Rightarrow y_i = x_i + 0,1 \cdot x_i \Rightarrow y_i = 1,1 \cdot x_i$$

άρα $\bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x} = 1,1 \cdot 20$
 και $S_y = 1,1 \cdot S \Rightarrow S_y = 1,1 \cdot 4$

$$CV_y = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{1,1 \cdot 4}{1,1 \cdot 20} = \frac{4}{20} = 0,2$$

ΘΕΜΑ Δ:



Δ1) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο $\triangle OAB$ έχω:

$$10^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 100 - x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \xRightarrow{y > 0} y = \sqrt{100 - x^2}$$

άρα $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, η συνάρτηση που εκφράζει το y ως συνάρτηση του x .

πρέπει $y > 0$
 και $x > 0$

$$\text{δηλαδή } \sqrt{100 - x^2} > 0 \Rightarrow 100 - x^2 > 0 \Rightarrow 100 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{100} \\ \Rightarrow |x| < 10 \xRightarrow{x > 0} x \in (0, 10)$$

άρα $A_f = (0, 10)$

Δ2) άρα μου ζητάνε το $f'(8)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}, \text{ οπότε}$$

$$f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100-8^2}} = \frac{-8}{\sqrt{100-64}} = \frac{-8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Delta 3] \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)-8}{x-6} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100-x^2}-8)(\sqrt{100-x^2}+8)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{100-x^2}^2 - 8^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{100-x^2-64}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{36-x^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x-6)(6+x)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = - \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6+x}{\sqrt{100-x^2}+8} = - \frac{6+6}{\sqrt{100-36}+8} = - \frac{12}{\sqrt{64}+8} = - \frac{12}{8+8} = - \frac{12}{16} \\ &= \boxed{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\Delta 4] x_1=2,3, x_2=3,5 \text{ και } x_3=2,8 \text{ άρα } x_1 < x_3 < x_2$$

$$f(x) = \sqrt{100-x^2} \quad \forall x \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}} < 0 \text{ άρα } f \downarrow \forall x \in (0,10)$$

$$\forall x \in (0,10)$$

$$\text{οπότε } x_1 < x_3 < x_2 \xRightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

ΤΕΛΟΣ ΑΓΙΑΝΤΗΣΕΩΝ