



ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2021

By infomath-anelixis ΚΑΡΔΙΤΣΑ

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2-ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΤΕΙΑ
ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ



infomath
anelaxis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelaxis.gr

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΘΕΜΑ Α:

A1] 19^η Απόδειξη

A2] Αν g, h συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει το όριο στο x_0 και είναι ίσα με $\lambda \in \mathbb{R}$ και ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$.

A3] Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες αν έχουν το ίδιο π.ο A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

A4] α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ



**infomath
anelaxis**

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelaxis.gr

ΘΕΜΑ Β: $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$

Β1] θέτω $x+1=y \Rightarrow x=y-1$

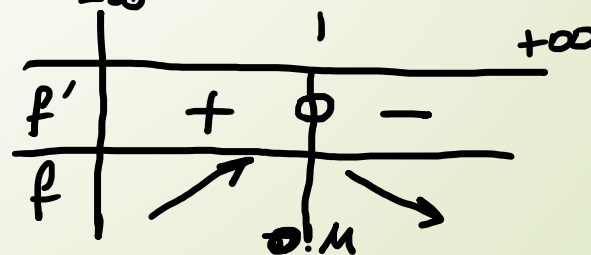
άρα $f(y) = y \cdot e^{-(y-1)} \Rightarrow f(y) = y \cdot e^{1-y}$

άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}$
με $A_f = \mathbb{R}$

Β2] η f παραγωγίσιμη και συνεχής με

$$f'(x) = (x \cdot e^{1-x})' = (x)' \cdot e^{1-x} + x \cdot (e^{1-x})' = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = (1-x) \cdot e^{1-x}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x) \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{+} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$



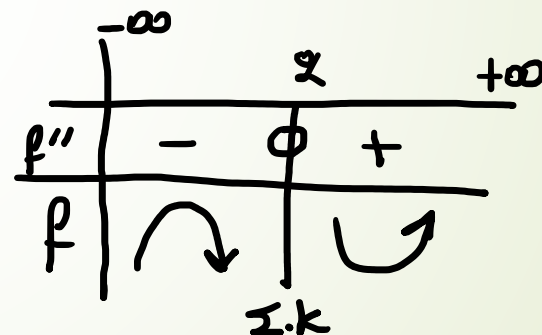
$f \nearrow$ στο $(-\infty, 1]$
 $f \searrow$ στο $[1, +\infty)$



η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1 \cdot e^0=1$

$$\begin{aligned} \text{B3]} \quad f''(x) &= (1-x) \cdot e^{1-x})' = (1-x)' \cdot e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = \\ &= -e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x} = -2e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-2) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow (x-2) \cdot e^{1-x}=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$



η f κοίτη στο $(-\infty, 2]$

η f κυρτή στο $[2, +\infty)$

η f παρουσιάζει Ι.Κ στο 2 το $f(2)=2e^{-1}=\frac{2}{e}$ ο.κ το $(2, \frac{2}{e})$



Η f συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• στο $+\infty$: $1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e}{e^x} \stackrel{+\infty}{\stackrel{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$$

ΣΥΝΕΠΩΣ η $y = o(x'x)$ είναι
οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

• στο $-\infty$: $1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} \cdot e = +\infty \cdot e = +\infty$

άρα δεν έχει ασύμπτωτη
στο $-\infty$



B4 1. $\leq \infty$ $A_1 = (-\infty, 1]$ η $f \nearrow$, άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$$

αφού $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{e}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} x e = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$$\rightarrow f(1) = 1$$

2. $\leq \infty$ $A_2 = [1, +\infty)$, η $f \searrow$, άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1]$$

αφού $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$

$$\rightarrow f(1) = 1$$

(i) άρα

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$$



infomath
anelixis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelixis.gr



$\lambda \leq 0$, η $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία λύση
αφού $\lambda \in f(A_1)$ και $f \nearrow$ στο A_1

$0 < \lambda < 1$, η $f(x) = \lambda$ έχει 2 λύσεις ακριβώς
αφού $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$ και f γν. μονότονη
σε ένα από αυτά

$\lambda > 1$, $\lambda \notin f(A)$ άρα η $f(x) = \lambda$, αδύνατη

$\lambda = 1$, η $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα.



infomath
anelaxis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelaxis.gr

ΘΕΜΑ Γ: $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $a < -3$

Γ1 $A_f = (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$ με σημείο αλλαγής το 0

- f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική
- f συνεχής στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική

• στο 0 * $\lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$

* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \sin 0 = 0$

$f(0) = 1$

η f συνεχής στο $x_0 = 0$

Άρα η f συνεχής στο A_f



για την παραγωγισιμότητα στο 0

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (ax^2 - 3x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = \boxed{-1}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

η f όχι παραγωγισιμη στο $x_0 = 0$

Γ2 (i) • f συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ως συνεχής στο Af

• f παραγωγισιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = -\eta \mu x$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(\frac{3\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$$

οπότε δεν ικανοποιείται
το Θ. Rolle στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$



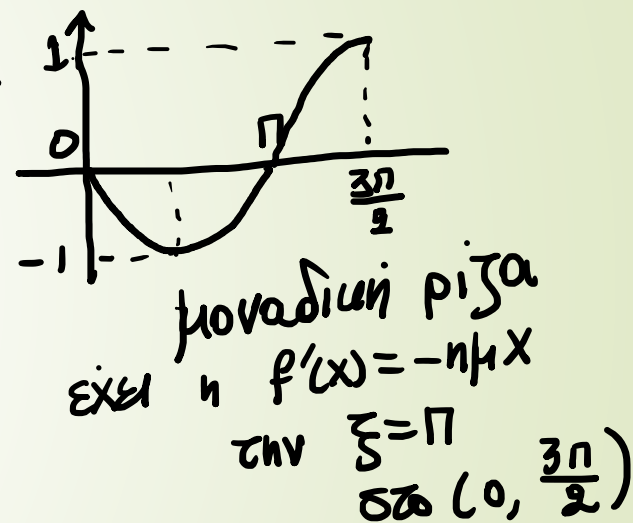
infomath
anelaxis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelaxis.gr

ii) το ότι δεν ικανοποιείται το Rolle στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει ρίζα για την f' στο εν λόγω διάστημα.

$$\forall x \in (0, \frac{3\pi}{2}) \text{ έχω } f(x) = \sin x \text{ και } f'(x) = -\eta\mu x$$



[3] δηλαδή αρκεί ν.δ.ο $f'(x) \neq 0 \quad \forall x < 0$
για $x < 0$ έχω $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 3a \cdot (-1) = 36 + 12a$$

$$\text{όμως } a < -3 \Rightarrow 12a < -36 \Rightarrow 36 + 12a < 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

εφα $f'(x) \neq 0 \quad \forall x < 0$

εφα η cf δεν έχει σημεία με $x < 0$ στα οποία η $εcf \parallel x'x$



infomath
anelaxis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelaxis.gr

Γ4) Θα μελετήσω την μονοτονία και τα ακρότατα της f .

$$\text{έχω } f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 6x - 1, & x < 0 \\ -\eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

f όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Ξέρω ότι για $x < 0$: $f'(x) \neq 0$ και $3a < 0$ άρα $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$
άρα $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$

Ξέρω ότι για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}]$: $f'(x) < 0$ στο $(0, \pi)$

και
 $f'(x) > 0$ στο $(\pi, \frac{3\pi}{2}]$

f συνεχής και ορισμένη στο 0

	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
f'		-	-	+
f		$\searrow$	$\swarrow$	$\nearrow$

ακόμα ελάχιστο
στο π το
 $f(\pi) = \sin \pi = 1$

άρα $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$



ΘΕΜΑ Δ:

$$\underline{\Delta 1)} \ln x = \frac{1}{x} \Rightarrow x \ln x - 1 = 0$$

$$\text{Θέτω } h(x) = x \ln x - 1$$

• h συνεχής στο $[1, e]$

$$\bullet h(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 = -1 < 0$$

$$h(e) = e \ln e - 1 = e - 1 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} h(1) \cdot h(e) < 0 \end{array} \right\}$$

Θ. Bolzano

$\Rightarrow \exists$ τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τ.ω $h(x_0) = 0$

Η h συνεχής και παραγωγίσιμη με $h'(x) = (x \ln x - 1)' = (x)' \ln x + x (\ln x)'$
 $= \ln x + 1 > 0$
 $\forall x \in (1, e)$

αρα $h \nearrow$, επομένως, η ρίζα x_0 μοναδική.

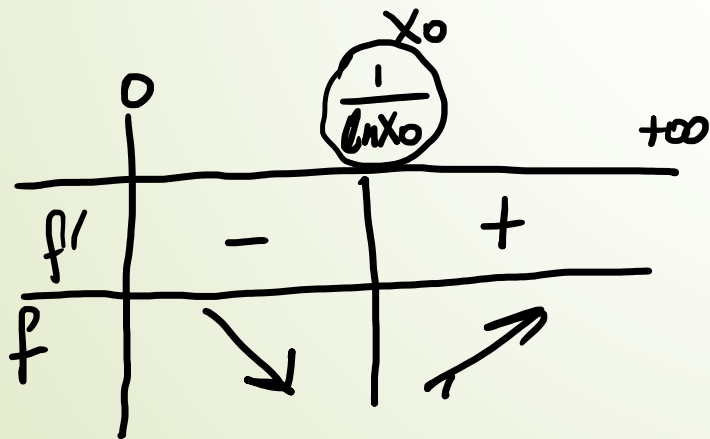


Δ2) $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$

Η f συνεχής και παραγ με: $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$

$$\cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\ln x_0} \Rightarrow x = x_0$$

$$\cdot f'(x) > 0 \Rightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \ln x_0 > \frac{1}{x} \Rightarrow x > \frac{1}{\ln x_0} \Rightarrow x > x_0$$



η f ↓ στο $(0, x_0]$

η f ↑ στο $[x_0, +\infty)$

η f ολικό ελάχιστο στο $x = x_0$ το $f(x_0)$

$$\begin{aligned} \text{με } f(x_0) &= \ln x_0 (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \\ &= x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = \end{aligned}$$



$$= x_0 \ln x_0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Δ3 $g(x) = x \cdot e^{-x}$ και $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = h(x) \Rightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Rightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Rightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \cdot \ln \frac{x_0}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot (\ln x_0 - 1) \Rightarrow \ln x - x = \ln x_0(x+1) - x - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln x = \ln x_0(x+1) - 1 \Rightarrow 0 = \ln x_0(x+1) - \ln x - 1$$

$$\Rightarrow 0 = f(x) \Rightarrow f(x_0) = f(x) \Rightarrow \boxed{x = x_0}$$

αφού στο x_0 παραστή
ριζα, που είναι απροσάρο,
είναι μοναδική

$$\rightarrow g'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$\rightarrow h'(x) = \left(\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \cdot (x+1)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot (\ln x_0 - 1)$$
$$= \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) =$$



infomath
anelaxis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΡΔΙΤΣΑ
www.infomath-anelaxis.gr

$$= \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right) = \frac{x_0^x \cdot x_0}{e^x \cdot e} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - \frac{x_0}{x_0} \right) = \frac{x_0^x \cdot \cancel{x_0} (1-x_0)}{\cancel{x_0} \cdot e^x \cdot e} = \frac{x_0^x \cdot (1-x_0)}{e^x \cdot e}$$

έστω $g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0 \cdot e^{-x_0} = \frac{x_0^{x_0} \cdot (1-x_0)}{e^{x_0} \cdot e} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0} \cdot (1-x_0)}{e^{x_0} \cdot e} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0} \cdot (1-x_0)}{e \cdot e^{x_0}} \Leftrightarrow x_0^{x_0} = e \Leftrightarrow \ln x_0^{x_0} = \ln e \Leftrightarrow x_0 \cdot \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 \cdot \frac{1}{x_0} = 1$$

$\Leftrightarrow 1=1$
που ισχύει

άρα $h'(x_0) = g'(x_0)$ οπότε οι (h, g)
κοινή εφαπτομένη, στο κοινό σημείο x_0 .



infomath
anelixis

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

ΚΑΡΔΙΤΣΑ

www.infomath-anelixis.gr

Δ4]. $f(x) > g(x)$

$$AB = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-\varphi(x))^2} = \sqrt{(f(x)-\varphi(x))^2} = \underbrace{|f(x)-\varphi(x)|}_{+} = f(x) - \varphi(x)$$

άρα $d(x) = f(x) - \varphi(x)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση AB.

έχω ελάχιστο στο x_0 άρα

οιπώ θ. Fermat

$$d'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Rightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

• Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη, τότε το x_0 κρίσιμο σημείο της φ .

άρα x_0 κρίσιμο σημείο της φ

Συχαριστούμε για την επίσκεψη!!!