

ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2023

By infomath-anelixis ΚΑΡΔΙΤΣΑ

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2-ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΤΕΙΑ
ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

ΘΕΜΑ Α:

A1 Απόδειξη: σχολιό σελ 111

A2 Θεωρία: σχολιό σελ 104

A3 Θεωρία: σχολιό σελ 128

A4 α) $\wedge$ β) $\wedge$ γ) $\wedge$ δ) Σ ε) Σ

$\downarrow$
π.χ $f(x) = 5x^3 + x + 1$
με $f'(x) = 15x^2 + 1 > 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Β:

$$g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$\text{B1} \quad f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

$$\begin{array}{lcl} x \in A_h & \begin{array}{l} \supset x > 0 \\ \supset \ln x \in \mathbb{R} \end{array} & \begin{array}{l} \supset x > 0 \\ \supset A_{g \circ h} = (0, +\infty) \end{array} \end{array}$$

B2 Η f συνεχής και παραγωγίσιμη (με:

$$i) f'(x) = \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{x} \right)' = \left(\frac{4}{x} - x \right)' = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0 \quad \text{η } f \downarrow \text{ στο } (0, +\infty)$$

$$ii) \pi > e \xRightarrow{f \downarrow} f(\pi) < f(e) \Rightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Rightarrow \frac{1}{4-e^2} \cdot \frac{4-\pi^2}{\pi} > \frac{1}{4-e^2} \cdot \frac{4-e^2}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi(4-e^2)} > \frac{1}{e} \xRightarrow{\pi > 0} \frac{4-\pi^2}{\pi(4-e^2)} > \frac{\pi}{e}$$

$$\underline{B3} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (4-x^2) = (+\infty) \cdot 4 = +\infty$$

άρα η $x=0$ (ο $y'y$), είναι
κατακόρυφη ασύμπτωτη της cf .

$$\underline{\text{στο } +\infty}: \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \quad \text{άρα } \boxed{\lambda = -1}$$

$$\text{οπότε } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \text{άρα } \boxed{\beta = 0}$$

οπότε $\boxed{y = -x}$ πλάγια
ασύμπτωτη στο
 $+\infty$

$$\underline{B4)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sin(1+x^2)}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4-x^2} \cdot \sin(1+x^2)$$

apa $\left| \frac{x}{4-x^2} \cdot \sin(1+x^2) \right| \leq \left| \frac{x}{4-x^2} \right| \Rightarrow - \left| \frac{x}{4-x^2} \right| \leq \frac{x}{4-x^2} \cdot \sin(1+x^2) \leq \left| \frac{x}{4-x^2} \right|$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} - \left| \frac{x}{4-x^2} \right| = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{4-x^2} \right| = 0 \end{array} \right\} \text{KP. PARENBOLHS} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4-x^2} \cdot \sin(1+x^2) = 0$$

ΘΕΜΑ 5:

Γ₁ $\forall x \in [2, 3]$ έχω $\int_2^3 x f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_2^3 x \cdot \left(\frac{1}{x} + a\right) dx = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_2^3 (1 + ax) dx = 1 \Rightarrow [X]_2^3 + a \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Rightarrow 3 - 2 + a \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{5a}{2} = 1$
 $\Rightarrow \frac{5a}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$

για $a = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ₂ i) η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ καθώς $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1)$

και συνεχής $\forall x \in (-\infty, 1)$ ως πολυώνυμο
και συνεχής $\forall x \in (1, +\infty)$ ως ρητή

αρκεί ν.δ.ο η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, ώστε να έχει εφαπτομένη
ε f , εκεί.

Παραγωγισιμότητα στο $x_0=1$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{1} = \frac{-1}{1} = \ominus 1$

$f(1) = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{1} = \ominus 1$

άρα η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, οπότε ορίζεται η ΕΓΡ εκεί

ii) η οποία είναι η:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow \varepsilon: y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow \varepsilon: y - 1 = -x + 1 \\ \Rightarrow \boxed{\varepsilon: y = -x + 2}$$

άρα $\lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1$
 $\Rightarrow \omega = 135^\circ$

[3] • $x < 1$: έχω $f'(x) = 2x - 3 < 0$ οπότε η $f \downarrow \forall x \in (-\infty, 1)$ άρα "1-1"

• $x \geq 1$: έχω $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ οπότε η $f \downarrow \forall x \in [1, +\infty)$ άρα "1-1"

• $A_1 = (-\infty, 1)$, f συνεχής και $f \downarrow$, άρα
 $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (1, +\infty)$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 3) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

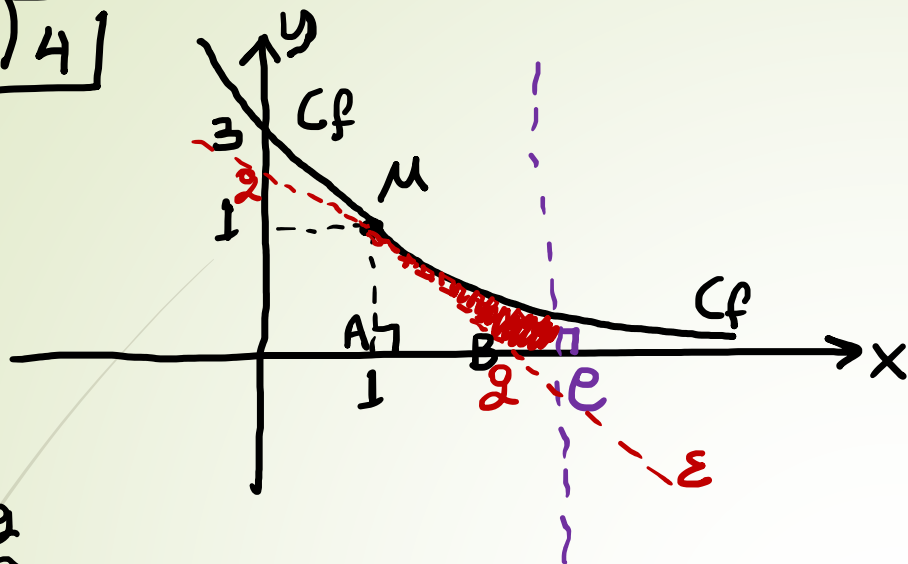
• $A_2 = [1, +\infty)$, f συνεχής και $f \downarrow$, άρα
 $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = (0, 1]$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\rightarrow f(1) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } f(A) &= f(A_1) \cup f(A_2) \\ &= (1, +\infty) \cup (0, 1] \\ &= (0, +\infty) \end{aligned}$$

4]



$$\begin{aligned} E &= \int_1^e f(x) dx - E_{AMB} \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{AB \cdot AM}{2} = [\ln x]_1^e - \frac{1 \cdot 1}{2} \\ &= \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ r.k.} \end{aligned}$$

$\varepsilon: y = -x + 2$

σ.τ με $x'x: (2, 0) B$

σ.τ με $y'y: (0, 2)$

ΘΕΜΑ Δ : $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = l \in \mathbb{R}$

Δ1 Θεω $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$ απο $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l}$

$\Rightarrow f(x) = g(x)(x-1) + 2x$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x-1) + 2x] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \cancel{l \cdot 0} + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

α' τρόπος

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k \right] \Rightarrow 2 = \cancel{\ln 1} - 1 + k \\ \Rightarrow 2 + 1 = k \Rightarrow \boxed{k=3}$$

β' τρόπος

η f συνεχής στο $x_0=1$, ως πράξεις συνεχών

οίρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \ln 1 - \frac{1}{1} + k = 2 \Rightarrow -1 + k = 2 \Rightarrow \boxed{k=3}$

Δ2]

• f συνεχής στο $(0,1]$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = \ln 2 - (+\infty) + 3 = -\infty$

οίρα θα υπάρχει αριθμός a κοντά στο 0^+
τέτοιος ώστε $f(a) < 0$
και έχω $f(1) = 2 > 0$

Βάσει θεωρήματος Βολζανο υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ ώστε
 $f(x_1) = 0$

- f συνεχής στο $[1, 2)$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u - \frac{1}{2} + 3 = -\infty - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$

$\text{Θέτω } 2-x=u$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x=0$
 $u \rightarrow 0$

άρα υπάρχει αριθμός β κοντά στο 2^-

ώστε $f(\beta) < 0$

και $f(1) = 2 > 0$

βάσει Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστ. ένα $x_2 \in (1, 2)$ τ.ω $f(x_2) = 0$

δηλ $x_1 < 1 < x_2$

με $f'(x) = \frac{1}{2-x} (2-x)' + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2(2-x)} + \frac{2-x}{x^2(2-x)} = \frac{-x^2-x+2}{x^2 \cdot (2-x)} + \forall x \in (0, 2)$

• $f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = 9$

$x_{1,2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

	0	1	2
f'	+	φ	-
f		↗	↘

άρα x_1 μοναδική στο $(0, 1)$
 x_2 μοναδική στο $(1, 2)$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln\frac{5}{3} - \cancel{3} + \cancel{3} = \ln\frac{5}{3} > \ln 1$$

$$\text{άρα } f\left(\frac{1}{3}\right) > 0$$

άρα στο $\frac{1}{3}$ η f θετική, όντας $\nearrow$ στο πέρασμα της από εκεί, άρα η ρίζα $x_1 \in (0, \frac{1}{3})$ δηλ $x_1 < \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \Delta 3 \mid & \cdot \text{η } f \text{ συνεχής στο } \left[x_1, \frac{1}{3}\right] \\ & \cdot \text{η } f \text{ παρ/κη στο } \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ}} f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - \cancel{f(x_1)}}{\frac{1}{3} - x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - \frac{3x_1}{3}} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

$\Delta 4 \mid$ i) ισχύει ότι

$$F(x_1) = G(x_1) + C$$

$$F(x_2) = G(x_2) + C \quad (-)$$

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= G(x_1) + \cancel{C} - \cancel{G(x_2)} - \cancel{C} \\ \Rightarrow -F(x_2) &= G(x_1) \Rightarrow G(x_1) + F(x_2) = 0 \end{aligned}$$

ii) έχω την εξίσωση $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$

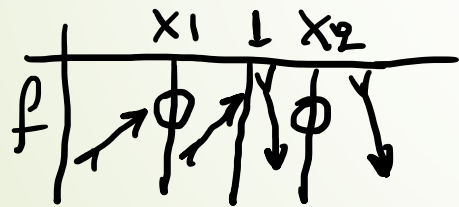
• h συνεχής στο $[x_1, x_2]$

• $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$

αφού $* h(x_1) = x_1 \cdot \cancel{F(x_1)} + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$

$* h(x_2) = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 \cdot \cancel{G(x_2)} - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) - x_1 + x_2$
 $= -x_1 G(x_1) - x_1 + x_2 > 0$

γιατί $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$



αφού $G'(x) = f(x) > 0$ άρα G $\nearrow$ στο $[x_1, x_2]$

οπότε $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) = 0$

άρα από Bolzano υπάρχει

η ρίζα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τ.ω $h(x_0) = 0$

$\Rightarrow G(x_1) < 0$

$$\text{εξο } h'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2$$

$$= \underbrace{f(x)}_{+} (\underbrace{x_1 + x_2}_{+}) + 2 > 0$$

$h \nearrow$
 άρα x_0 μοναδική

Τέλος απαντήσεων!!!