



ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2024

By infomath-anelixis ΚΑΡΔΙΤΣΑ

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2-ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΤΕΙΑ
ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

ΘΕΜΑ Α

A1 | Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών σελ 76 σχολικού $\rightarrow$ απόδειξη

A2 | ορισμός κυρτής συνάρτησης, σελ 155 σχολικού

A3 | Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, σελ 216 σχολικού $\rightarrow$ διατύπωση

A4 | α) $\leq$ β) $\leq$ δ) $\wedge$ δ) $\wedge$ ε) $\leq$

ΘΕΜΑ Β

$g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

B1 | $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}^2 - 1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$ πρέπει $h(x) \neq 0$

αρα $h(x) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \neq \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x \neq 1$ αρα $A_{\frac{g}{h}} = (1, +\infty)$ $\leftarrow$ ΑΡ

και $r(x) = g \cdot h = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) = \sqrt{x}^2 - (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = x - \frac{1}{x}$ με $Ar = [1, +\infty)$

B2 Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1+1) \cdot (x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1) \Rightarrow \cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - 1 = \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$ άρα η f είναι "1-1", οπότε αντιστρέφεται

Θέτω $f(x) = y \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Rightarrow x+1 = yx-y \Rightarrow x-yx = -y-1 \Rightarrow x \cdot (1-y) = -(y+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-(y+1)}{1-y} \Rightarrow x = \frac{-(y+1)}{-(y-1)} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$

οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$

B3 $r(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$ με $A_r = [1, +\infty)$

Η f είναι συνεχής στο A_r , οπότε δεν έχει ματαίωσιμες ασυμπτωτές

πλάνια ή οριζόντια στο $+\infty$: $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$
 $\Rightarrow \lambda = 1$

για $\lambda = 1$: $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \frac{1}{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \beta = 0$

άρα η $y=x$ είναι ασυμπτωτική στο $+\infty$

$$\text{B4]} (f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4f(x) \Rightarrow x^2 = 1 + 4(x - \frac{1}{x}) \Rightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Rightarrow \cdot x \neq 0$$

$$\Rightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Rightarrow (x-4)(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array} \right.$$

$x=1$ απορρίπτεται

$x=-1$ απορρίπτεται

$$\text{ΘΕΜΑ 7: } f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^x, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2 \end{cases}$$

Π1] η f συνεχής στο $A_f = [0, +\infty)$ από εκφώνηση, άρα συνεχής και στο σημείο εναλλαγής της, το $x_0 = 2$ οπότε: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^x) = -4 + 4 + e^2 = e^2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 + \lambda = -4 + 8 - 3 + \lambda = \lambda + 1$$

$$\bullet f(2) = \lambda + 1$$

$$\text{οπότε πρέπει } e^2 = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = e^2 - 1$$

αφού γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$
και $e^x > 0$, οπότε

$$\ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln e^x \leq e^x-1 \Rightarrow x \leq e^x-1 \Rightarrow x+1 \leq e^x \Rightarrow e^x \geq x+1$$

με το "=" να ισχύει
μόνο για $x=0$

Γ2 για $\lambda=0$, έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

η f συνεχής στο $x_0=2$
αρα $f \downarrow$ στο $Af = [0, +\infty)$

Γ3 i) η f συνεχής στο $[0, 3]$

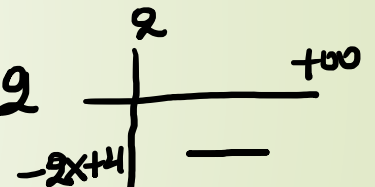
για να ικανοποιεί ΘΜΤ, πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αλλαγής $x_0=2$

• η $f \forall x \in [0, 2)$ είναι της μορφής $f(x) = ax+b$
(ευθεία) με $a < 0$, οπότε είναι $\downarrow$ (σχολ. βιβλίο)
Αλγεβρας Β'

• $\forall x \in [2, +\infty)$ η f συνεχής και για $x > 2$, έχω

$$f'(x) = -2x+4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x+4 = 0 \Rightarrow x = 2$$



αρα $f \downarrow$ στο $(2, +\infty)$

$$f(2)=1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = \textcircled{-2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x^2 - 4x + 4)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x - 2)] = 0$$

άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, οπότε μετ' επέκταση όχι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$

οπότε η f , δεν ικανοποιεί Θ.Μ.Τ στο $[0, 3]$

(ii) μου ζήτησε να δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \lambda_{\Delta \epsilon}$$

$$\text{άρα } \lambda_{\Delta \epsilon} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \Rightarrow \lambda_{\Delta \epsilon} = \frac{0 - 5}{3} \Rightarrow \lambda_{\Delta \epsilon} = -\frac{5}{3}$$

$$\bullet f(3) = -9 + 12 - 3 = 0$$

$$\bullet f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$$

Το Θ.Μ.Τ. δεν μπορεί να μου δώσει τέτοιο ξ , γι' αυτό θα λύσω

$f'(x) = -\frac{5}{3}$ για να δω αν υπάρχει ρίζα

• για $x < 2$: $f'(x) = -2$, οπότε δεν υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi) = -\frac{5}{3}$$

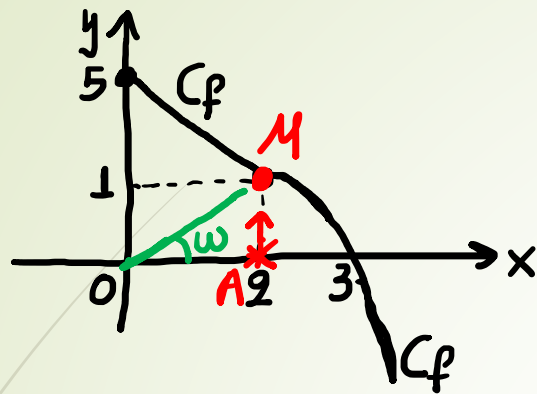
• για $x \geq 2$: $f'(x) = -2x + 4$ άρα $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Rightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Rightarrow$

$$-2\xi = -\frac{5}{3} - \frac{12}{3} \Rightarrow -2\xi = -\frac{17}{3} \Rightarrow \xi = \frac{17}{6} < 3$$

δεκτό

όπου υπάρχει το $(\frac{17}{6}, f(\frac{17}{6}))$

4) $A(2,0)$ και πάνω μια πρόχειρη C_F



άρα το M είναι το $(2,1)$

το A ανεβαίνοντας αλλάζει μόνο τεταγμένη

άρα αν $A(2, y(t))$ τότε $U'(t) = y'(t) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

$$\text{έχουμε } \exp \omega(t) = \frac{y(t)}{2} \Rightarrow (\exp \omega(t))' = \frac{1}{2} y'(t) \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2} y'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \exp^2 \omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2} y'(t) \Rightarrow (1 + \exp^2 \omega(t))' = \frac{1}{2} y'(t) \Rightarrow \left(1 + \frac{y^2(t)}{4}\right) \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2} y'(t)$$

$$\exp \omega(t) = \frac{y(t)}{2}$$

στην $t = t_0$:

$$y'(t_0) = 0,5$$

$$y(t_0) = 1 = y_M$$

$$\text{άρα } \left(1 + \frac{y^2(t_0)}{4}\right) \cdot \omega'(t_0) = \frac{1}{2} y'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{4}{20} \Rightarrow \boxed{\omega'(t_0) = 0,2 \text{ rad/sec}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1] $f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{\underbrace{x^2}_{+}}$, $x > 0$

	0	e	$+\infty$
f'		+	-
f		$\nearrow$	$\searrow$

ο.μ $f(e) = \frac{1}{e} + a$

Σύνολο τιμών: $(-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$

αρα $1 + \frac{1}{e} = a + \frac{1}{e} \Rightarrow \textcircled{a=1}$ αφού ο.μ το $f(e) = a + \frac{1}{e} \quad \forall x > 0$

οπότε $f(x) \leq a + \frac{1}{e}$

Δ2] • η f συνεχής στο $[\frac{1}{2}, 1]$

• $f(\frac{1}{2}) = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = 2(\ln \frac{1}{2}) + 1 = 2(-\ln 2) + 1 = -2\ln 2 + 1 < 0$

$f(1) = \frac{\ln 1}{1} + 1 = 1 > 0$

οπότε αφού $f(\frac{1}{2}) \cdot f(1) < 0$, βάσει θεωρήματος Bolzano

θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ τ.ω $f'(x_2) = 0$
Η $f \nearrow$ στο $[\frac{1}{2}, 1]$, άρα πηλ. μονοδική

Δ3 i) v.d.o $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς 2 ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$

$$\bullet f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{\ln 2^2 + 4}{4} = \frac{2\ln 2 + 4}{4} = \frac{2(\ln 2 + 2)}{4} = \frac{\ln 2 + 2}{2}$$

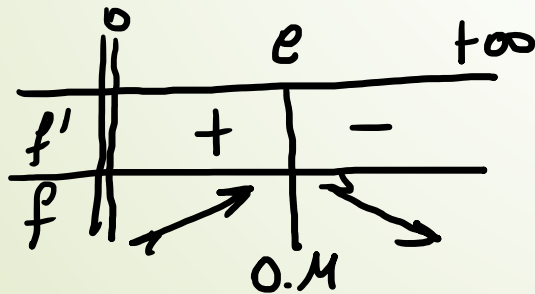
$$\bullet f(2) = \frac{\ln 2 + 2}{2}$$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{\ln x + x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (1)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' =$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow \boxed{x = e}$$

$$\bullet f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow 1 > \ln x \Rightarrow e > x \Rightarrow \boxed{x < e}$$



η $f \nearrow$ στο $(0, e]$

η $f \searrow$ στο $[e, +\infty)$

η f έχει μέγιστο στο $x_0 = e$
το $f(e) = \frac{1}{e} + 1$

άρα για $x < e$ η $f \nearrow$, οπότε $f(x) = f(4)$ έχει μοναδική ρίζα την $x_1 = 2$
 για $x > e$ η $f \searrow$, οπότε $f(x) = f(4)$ έχει μοναδική ρίζα την $x_2 = 4$

ii) $2^x \leq x^2$ στο $(0, +\infty)$
 με $\ln 2^x \leq \ln x^2 \Rightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \xrightarrow{2x > 0} \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{\ln 2}{2} + 1 \leq \frac{\ln x}{x} + 1$

$\Rightarrow f(2) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \geq f(2)$
 ισοδύναμη με $f(x) \geq f(4)$
 αφού $f(2) = f(4)$

• στο $(0, e)$ η $f \nearrow \Rightarrow f(x) \geq f(2) \Rightarrow x \geq 2$
 • στο $(e, +\infty)$ η $f \searrow \Rightarrow f(x) \geq f(4) \Rightarrow x \leq 4$

} άρα $2 \leq x \leq 4$

$$\underline{\Delta 4} \quad g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$$

$$E = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx$$

$$\text{ΘΕΩΡΩ } u = e^x \rightarrow x = \ln u \\ du = e^x dx$$

$$x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \quad \text{αρα έχουμε:} \quad E = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f(u) \cdot \frac{1 - \ln u}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

η f έχει πηξά απότομο $\Delta 2$ στο $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ για

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$\text{οπότε} \quad E = - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) \cdot f'(x) dx + \int_{x_0}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = - \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_{x_0}^1 \\ = - \frac{1}{2} f^2(x_0) + \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^2(1) - \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{1}{2} \left[2\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)^2 + 1 \cdot 1^2 \right] \\ \text{αρα } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) \text{ και } f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1$$


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[4 \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} = 2 \left(\frac{1}{4} - \cancel{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 2 + \ln^2 2 \right) + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{2}{4} - 2 \ln 2 + 2 \ln^2 2 + \frac{1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Τέλος απαντήσεων !!!