

# ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2025

*By infomath-anelixis* ΚΑΡΔΙΤΣΑ

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2-ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΤΕΙΑ  
ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

## ΘΕΜΑ Α:

A1] 22η απόδειξη A2] Ορισμός Θ.Ε.Τ σχολ. σελ 76

A3] ορισμός κατακόρυφης ασύμπτωτης σχολ. σελ 161

A4] α)  $\leq$  β)  $\leq$  γ)  $\wedge$  δ)  $\wedge$  ε)  $\leq$

## ΘΕΜΑ Β:

B1] Έχω  $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$  και η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$ , το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του  $\mathbb{R}$ , άρα από Θεώρημα Fermat, ισχύει ότι  $f'(1) = 0$

$$\bullet f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

$$\bullet f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Rightarrow 12 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = \frac{-12}{2} \Rightarrow a = -6$$

οπότε έχουμε  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$   $x \in \mathbb{R}$

$$\text{B2]} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \text{ οπότε } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \rightarrow 3 \end{matrix}$$
$$\Delta = 4 > 0$$

οπότε έχουμε:

|      |           |            |        |            |        |            |           |
|------|-----------|------------|--------|------------|--------|------------|-----------|
|      | $-\infty$ | $A_1$      | 1      | $A_2$      | 3      | $A_3$      | $+\infty$ |
| $f'$ |           | +          | $\phi$ | -          | $\phi$ | +          |           |
| $f$  |           | $\nearrow$ |        | $\searrow$ |        | $\nearrow$ |           |
|      |           |            | T.M    |            | T.E    |            |           |

\*  $\Delta = (0, 1] \subseteq A_1$  όπου  $f \nearrow$  και συνεχής  
 $f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)] = (-3, 1]$

•  $f(1) = 1$  •  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \cancel{0^3} - \cancel{6 \cdot 0^2} + \cancel{9 \cdot 0} - 3 = -3$

άρα  $0 \in f(\Delta)$ , οπότε υπάρχει  $x_1 \in (0, 1]$   
 τ.ω  $f(x_1) = 0$   
 $f \nearrow$  άρα μοναδική

\*  $A_2 = (1, 3] \subseteq A_2$  όπου  $f \searrow$  και συνεχής  
 $f(A_2) = [f(3), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)] = [-3, 1)$

•  $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = \cancel{27} - \cancel{54} + \cancel{27} - 3 = -3$   
 •  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$

άρα  $0 \in f(A_2)$ , οπότε υπάρχει  $x_2 \in (1, 3]$   
 τ.ω  $f(x_2) = 0$   
 $f \searrow$  άρα μοναδική

\*  $A_3 = (3, +\infty)$  όπου  $f \nearrow$  και συνεχής

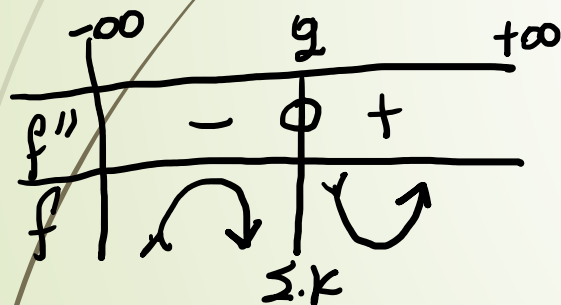
άρα  $f(A_3) = (\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-3, +\infty)$

•  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -3$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

άρα  $0 \in f(A_3)$  οπότε υπάρχει  $x_3 \in (3, +\infty)$  τ.ω  $f(x_3) = 0$   
η  $f \nearrow$  άρα μοναδική

οπότε η  $f$  έχει 3 θετικές πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2, x_3$ .

B3  $f''(x) = 6x - 12$  άρα  $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$



η  $f$  κοίτη στο  $(-\infty, 2]$

η  $f$  κυρτή στο  $[2, +\infty)$

η  $f$  παρουσιάζει Σ.Κ στη θέση  $x = 2$ , το  $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1$

B4 η ΕΓf στο σημείο  $A(\xi, f(\xi))$  και η ΕΓg στο σημείο  $B(\xi, g(\xi))$

$g(x) = x + f(x) \Rightarrow g(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$  και ΕΓf στο A  $\rightsquigarrow E_f: y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$   
ΕΓg στο B  $\rightsquigarrow E_g: y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi)$

η Εf τέμνει τον y'y για  $x = 0 \rightsquigarrow y - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Rightarrow y = -f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi)$

η Εg τέμνει τον y'y για  $x = 0 \rightsquigarrow y - g(\xi) = -\xi g'(\xi) \Rightarrow y = -g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi)$

Εκεί Εf και Εg τέμνονται, άρα:

$$\begin{aligned}
 -f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi) &= -g'(\xi) \cdot \xi + f(\xi) \Leftrightarrow -f'(\xi) \cdot \xi = -g'(\xi) \cdot \xi \Leftrightarrow -f'(\xi) = -g'(\xi) \Rightarrow \\
 \Leftrightarrow f'(\xi) &= g'(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) = 1 + f'(\xi) \Leftrightarrow g'(\xi) = 1 + f'(\xi) \quad \text{που λογικά}
 \end{aligned}$$

$g'(x) = 1 + f'(x)$

ΘΕΜΑ Γ:  $f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Γ1 συνέχεια στο  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0} = 0$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

άρα  $f$  συνεχής στο 0

Παραγωγισιότητα στο  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} \stackrel{0}{=} \text{DLH}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x}{1} = e^0 \eta \mu 0 + e^0 \sigma \upsilon \nu 0 = 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{0}{=} \text{DLH}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} (x^2 + x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} \stackrel{1}{=} +\infty$$

$2\sqrt{x^2 + x} > 0 \ \forall x$  κοντά στο 0  
απ' τα δεξιά

οπότε η  $f$ , δεν είναι παραγμένη στο 0.

Γ2] η  $f$  έχει πεδίο ορισμού στο  $\mathbb{R}$ , χωρίς σημεία ασυνέχειας, άρα δεν  
έχει κατακόρυφες ασυμπτωτές.

στο  $+\infty$ :  $\bullet \gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot (1+\frac{1}{x})}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$   
 $= \lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = \textcircled{1}$

$\bullet \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \sqrt{(1+\frac{1}{x})} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \textcircled{\frac{1}{2}}$

άρα  $\varepsilon: y = x + \frac{1}{2}$  πλάγια ασυμπτωτή στο  $+\infty$ .

στο  $-\infty$ :  $\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x}) = 0 \cdot 0 = 0$

από  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$   
 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

$$\left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| = \frac{|\eta \mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|}\right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{ΚΡΙΤ. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 \end{aligned}$$

$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$

από  $|e^x \eta \mu x| = e^x \cdot |\eta \mu x| \leq e^x$   
 άρα  $-e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{ΚΡΙΤ. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0 \end{aligned}$$

άρα η  $\varepsilon: y=0$  ( $x'x$ )  
 ορίζοντα ασύμπτωτη  
 της  $f$ , στο  $-\infty$ .

Γ3] θέλουμε ν.δ.ο η  $f$  έχει την μέγιστη ασύμπτωτη της στο  $+\infty$ , στο  $(-\pi, 0)$ , τουλάχισ. μία ροή.  
 $\forall x \in (-\pi, 0)$  έχω  $f(x) = e^x \eta \mu x$  και  $f$  συνεχής στο 0, δηλ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

έχω την εξίσωση  $f(x) = x + \frac{1}{2} \Rightarrow e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2} = 0$

θεωρώ  
 $\varphi(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$

•  $\varphi$  συνεχής στο  $[-\pi, 0]$

•  $\varphi(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = -e^{-\pi} \cdot \eta \mu \pi + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$\varphi(0) = \underset{\downarrow 0}{f(0)} - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

αρα βάσει θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχισ. ένα  $\xi \in (-\pi, 0)$  τ.ω  $\varphi(\xi) = 0$

$$\underline{14)} \quad \mu(x(t), y(t)) \xrightarrow[x \geq 0]{f(x) = \sqrt{x^2 + x}} \mu(x(t), \sqrt{x^2(t) + x(t)})$$

ο ρ.μ της ζηταγμένης  $\forall t \geq 0$ , είναι  $y'(t) = (\sqrt{x^2(t) + x(t)})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (x^2(t) + x(t))' =$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

έχω  $x'(t) > 0$

Θέλω να βρω  $t_0$ , τ.ω  $x'(t_0) = y'(t_0) \Rightarrow x'(t_0) = \frac{2x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0) = x'(t_0) \cdot 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Rightarrow x'(t_0) \cdot (2x(t_0) + 1) = x'(t_0) \cdot 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}$$

$$\Rightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Rightarrow (2x(t_0) + 1)^2 = (2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)})^2 \Rightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4(x^2(t_0) + x(t_0))$$

$: x'(t_0) > 0$   
 $\neq 0$

$$\Rightarrow \cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} + 1 = \cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} \Rightarrow 1 = 0 \text{ Αδύνατον}$$

άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0$

## ΘΕΜΑ Δ:

Δ1) απειεί v.δ.ο  $g'(x)=0, \forall x>0$

$$(x^{\ln x}) = e^{\ln x \ln x} = e^{\ln^2 x}$$

$$\text{αρα } (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot \frac{e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x}{x}}{e^{2 \ln^2 x}} \\ &= \frac{f(x) \cdot e^{\ln^2 x} - \frac{x f(x)}{2 \ln x} \cdot \frac{e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x}{x}}{e^{2 \ln^2 x}} = \frac{f(x) \cdot e^{\ln^2 x} - f(x) \cdot e^{\ln^2 x}}{e^{2 \ln^2 x}} = 0 \end{aligned}$$

αρα  $g$  σταθερή  
 $\forall x \in (0, +\infty)$

$$\text{Δ2) i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{DLH} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x f'(x)) = 1 \cdot f'(1) = 2$$

$f$  συνεχής και  $f(1)=0$   
από  $1 \cdot f(1) = 2 F(1) \cdot \ln 1 \Rightarrow f(1)=0$

- $f'(x) = \left( \frac{2F(x) \ln x}{x} \right)'$  αρα αποτέλεσμα συνεχές
- $\lambda_{\text{εφ}} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$

ii) η F συνεχής άρα  $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x)}{2 \ln x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x f'(x)}{\frac{2}{x}} =$   
 $= \frac{f(1) + f'(1)}{2} = \frac{0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

η g σταθερή, άρα  $g(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Rightarrow$   
 $c \in \mathbb{R}$  για  $x=1$   $\frac{F(1)}{1^0} = c \Rightarrow \frac{1}{1} = c \Rightarrow c=1$

άρα  $g(x)=1 \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Rightarrow F(x) = x^{\ln x}$

Δ3 i) F παραγωγισίμη στο  $(0, +\infty)$  με  $F'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \cdot e^{\ln^2 x}$

για  $x > 0$ :  $F'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \ln 1 \Rightarrow x = 1$

$F'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x e^{\ln^2 x}}{x} > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
|         | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $F'(x)$ |   | - | +         |
| $F$     |   | ↘ | ↗         |

$F \downarrow \forall x \in (0, 1]$   
 $F \uparrow \forall x \in [1, +\infty)$   
 $\} \mu \epsilon \text{ ο.ε στο } 1 \text{ το } F(1) = 1.$

έχουμε την εξίσωση  $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$   
έχει προφανή ρίζα το 1, αφού  $F(1^2) = F(1) - (1-1)^2$   
 $\Rightarrow F(1) = F(1)$  που λύνει

\* έστω ότι έχει ρίζα  $x_0 > 1$ , τότε  $x_0^2 > x_0 \xRightarrow{F \uparrow} F(x_0^2) > F(x_0) \Rightarrow F(x_0^2) - F(x_0) > 0$   
 $\Rightarrow -(x_0 - 1)^2 > 0$

\* έστω ότι έχει ρίζα  $0 < x_0 < 1 \Rightarrow x_0^2 < x_0 \xRightarrow{F \downarrow} F(x_0^2) > F(x_0) \Rightarrow F(x_0^2) - F(x_0) > 0$  ΑΤΟΠΟ  
 $\Rightarrow -(x_0 - 1)^2 > 0$  ΑΤΟΠΟ

άρα έχει μον. λύση την  $x=1$

Δ4 | ξέρω ότι  $F_{\min} = 1$ , άρα  $F(x) \geq 1, \forall x > 0$   
η  $F$  συνεχής στο  $[1, e]$

$$\text{άρα } E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

Želimo da  $e^x \geq x+1 \Rightarrow e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Rightarrow \int_0^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow$   
 $(=) \text{ za } x=0 \quad \quad \quad (=) \text{ za } x=1$

$$\Rightarrow E > \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \Rightarrow E > [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_1^e$$

$$\Rightarrow E > e - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 \Rightarrow E > e - 2 [x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e 1 dx + e - 1$$

$$\Rightarrow E > e - 2(e - 0) + 2[x]_1^e + e - 1 \Rightarrow E > e - 2e + 2(e - 1) + e - 1$$

$$\Rightarrow E > \cancel{e - 2e} + \cancel{2e} - 2 + e - 1 \Rightarrow \boxed{E > 2e - 3}$$