ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π 2026

By infomath-anelixis ΚΑΡΔΙΤΣΑ

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2-ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΤΕΙΑ

ΜΠΙΛΙΟΥΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ-ΣΤΑΥΡΑΚΟΥΔΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

ΘΕΜΑ Α

Α1/ Απόδειξη 17η σελ 133 σχολ

Α2/ Ορισμός σελ 51 σχολ (κριτήριο παρεμβολής)

Α3/ Ορισμός σελ 185 σχολ (παράγουσα)

Α4/ α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad g:[2,+\infty)$

$f(x)=2\ln(x-1)$ $\quad g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Β1/ $h(x)=f\circ g(x)=f(g(x))=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)=2\ln(\sqrt{x-2})=\ln\sqrt{x-2}^{\,2}=\ln(x-2)$

$$\left.\begin{matrix} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x\geq 2 \\ \sqrt{x-2}\cancel{+1}>\cancel{1} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x\geq 2 \\ \sqrt{x-2}>0 \\ x-2>0 \\ x>2 \end{matrix}\right\} x>2$$

οπότε $A_{f\circ g}=(2,+\infty)$

B2) Θέτω $h(x)=y \Rightarrow \ln(x-2)=y \Rightarrow e^{\ln(x-2)}=e^{y} \Rightarrow x-2=e^{y} \Rightarrow x=e^{y}+2$

άρα $h^{-1}(y)=e^{y}+2$ δηλ. $h^{-1}(x)=e^{x}+2$ με $A_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

$x>2$

$e^{y}+2>2 \Rightarrow e^{y}>0$ ισχύει $\forall y\in\mathbb{R}$

B3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2}$

$=(-\infty)\cdot 2=-\infty$

• αφού $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$

$u=x-2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ $\quad u\to 0$

• και $2\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}}{1}=2\cdot 1=2$

ΘΕΜΑ Γ

[1] $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$ $\quad \kappa,\mu \in \mathbb{R}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^3}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^3}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\kappa=0 \Rightarrow \kappa=0$

ii) $\lambda\varepsilon=1 \Rightarrow f'(0)=1 \Rightarrow \dfrac{\mu-\mu\cdot 0^2}{(0^2+1)^2}=1 \Rightarrow \dfrac{\mu}{1}=1 \Rightarrow \mu=1$

$f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$ άρα $f'(x)=\dfrac{(\mu x)'(x^2+1)-\mu x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\mu(x^2+1)-\mu x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\mu-\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

[2] i) για $\kappa=0$ και $\mu=1$

έχω $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ με $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{+}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow 1=x^2 \Rightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Τ.Ε		Τ.Μ		

η $f \searrow$ για $x\in(-\infty,-1]$

$f \nearrow$ για $x\in[-1,1]$

$f \searrow$ για $x\in[1,+\infty)$

Τ.Ε στο -1 το $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2}$

Τ.Μ στο 1 το $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

ii) Exω

x	$-\infty$	A_1	-1	A_2	1	A_3	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

στο $A_1 = (-\infty, -1]$ η f ↘ και συνεχής

άρα $f(A_1) = [f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = [-\frac{1}{2}, 0)$

αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

στο $A_2 = (-1, 1]$ η f ↗ και συνεχής

άρα $f(A_2) = (\lim_{x\to-1^+} f(x), f(1)] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

στο $A_3 = (1, +\infty)$ η f ↘ και συνεχής

άρα $f(A_3) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)) = (0, \frac{1}{2})$

αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3)$

$= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

έχω την εξίσωση $f(x)=a^2+\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\lambda$ Θεωρώ $\lambda=a^2+\frac{1}{2}>0$ $\forall a\in\mathbb{R}$

αν $a\neq 0$ τότε $a^2>0 \Rightarrow a^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{2} \Rightarrow a^2+\frac{1}{2}>f_{max}$ άρα αδύνατη

αν $a=0$ τότε $a^2+\frac{1}{2}=0^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=f_{max}$ άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=1$ (θέση μεγίστου)

$\boxed{\Gamma 3}$ i) $I_\nu=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu}\cdot x}{x^2+1}dx$

$I_{\nu+1}=\int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu}\cdot x^3}{x^2+1}dx$

άρα $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1 \frac{x^{2\nu}\cdot x}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{x^{2\nu}\cdot x^3}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu}\cdot x+x^{2\nu}\cdot x^3}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x\cdot x^{2\nu}\cdot \cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}dx$

$=\int_0^1 (x^{2\nu+1})dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}-0=\frac{1}{2\nu+2}$

(ii) $I_0=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln2-\underbrace{\cancel{\ln1}}_{0})$

$=\frac{1}{2}\ln2=\ln\sqrt{2}$

$I_1=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-I_0=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$

αφού

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} & x^2+1 \\ \hline -\cancel{x^3}-x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$I_2=\int_0^1\frac{x^5}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\left[(x^3-x)-\frac{x}{x^2+1}\right]dx=\int_0^1(x^3-x)\,dx-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1-I_0=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$

$=-\frac{1}{4}-\ln\sqrt{2}$

αφού

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^2+1 \\ \hline -x^5-x^3 & x^3-x \\ \hline -x^3 & \\ x^3+x & \\ \hline x & \end{array}$$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1 Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+x,\ x\in\mathbb{R}$

- h συνεχής στο $(-1,0)$ ως παρ/μη στο $\mathbb{R}$
- $h(-1)=\underset{\in(0,1)}{g(-1)}-1<0$

  $h(0)=\underset{\in(0,1)}{g(0)}+0>0$

$\Rightarrow h(-1)\cdot h(0)<0 \xrightarrow{\text{Bolzano}}$ υπάρχει τουλ ένα $x_1\in(-1,0)$

τ.ω $h(x_1)=0 \Rightarrow g(x_1)+x_1=0$

η $h(x)$ παραγωγίσιμη με $h'(x)=g'(x)+1$

και επειδή $g'(x)\neq -1$ έχω $g'(x)+1\neq 0$

οπότε $h'(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

και h' συνεχής ως πράξεις συνεχών αφού g' συνεχής

άρα διατηρεί πρόσημο στο $(-1,0)$ οπότε η h είναι γν. μονότονη, άρα έχει το πολύ μια ρίζα.

άρα **η x_1 μοναδική**

Δ2 η f συνεχής στο 0 και $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2h(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x\cdot h(x))=0\cdot h(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x}{x}+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}_{\frac{0}{0}}-\lim_{x\to 0}\frac{\kappa x}{x}$$

$$=2\cdot 1+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1}}_{DLH}-\kappa=2+1-\kappa=3-\kappa$$

άρα πρέπει $3-\kappa=0\Rightarrow \underline{\kappa=3}$

Δ3 $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot(g(x)+x), & x\in(-\infty,0)\\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x, & x\in[0,\frac{\pi}{2})\end{cases}$

i) $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ έχω $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x+1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=0\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3x-2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+1=0$$

$\sigma\upsilon\nu x>0$

$$\Rightarrow (\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2 x-(\sigma\upsilon\nu^2 x-1)=0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-1)-(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)=0$$

$$\Rightarrow (\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1)=0$$

$\Delta = 9>0$ → 1

→ $-\frac{1}{2}$ απορ

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x-1=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=1 \Rightarrow x=0 \\ \text{ή} \\ 2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$x\geq 0 \xRightarrow[f\nearrow]{} f(x)\geq f(0) \Rightarrow f(x)\geq 0$$

$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

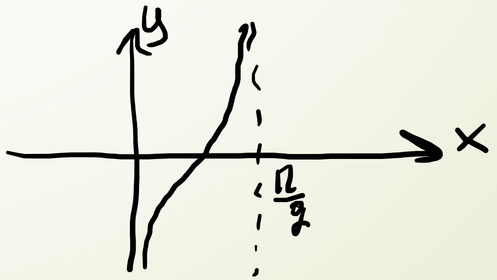
"=" για 0, $\frac{\pi}{2}$

ii) $3f(x)=\pi \Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{3}$

$\Delta=[0,\frac{\pi}{2})$ ή $f\nearrow$

$$f(\Delta)=[f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x))=[0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)=2\eta\mu\frac{\pi}{2}+(+\infty)-\frac{3\pi}{2}=+\infty$$



Δ4

i) $x_1 \in (-1, 0)$

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} \cdot (\underbrace{g(x)+x}_{h(x)})$$

$h(x_1)=0 \Rightarrow g(x_1)+x_1=0 \Rightarrow g(x_1)=-x_1>0$

άρα $g(x_1)>0$

$h(0)=g(0)+0>0$

στο x_1 η h μοναδική ρίζα στο $(-1,0)$

άρα $\forall x \in [x_1, 0]$ άρα $h(x) \geq 0 \Rightarrow g(x)+x \geq 0$

$$\left.\begin{matrix} x^2 \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 \cdot h(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$\forall x \in [x_1, 0]$

ii) οπότε ισχύει $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{f(x_2)} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [x_1, 0]$

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2(g(x)+x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x)+x^3)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x)+x^3)\,dx =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - (-2\sigma\upsilon\nu 0 - \ln\sigma\upsilon\nu 0 - 0)$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x)+x^3)\,dx = -2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{3\pi^2}{18} + 2 + \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x)+x^3)\,dx = -1 - (\cancel{\ln 1} - \ln 2) - \frac{\pi^2}{6} + 2 \Rightarrow \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x)+x^3)\,dx = -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{0} (x^2 g(x)+x^3)\,dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}} \quad (1)$$

$$\bullet \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx = 0 - x_1^3 \cdot g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx =$$

$$= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx = -x_1^3 \cdot (-x_1) - 3 \cdot \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \int_{x_1}^{0} \left(x^2 g(x) + x^3\right) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3\,dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}$$

άρα $(2) \Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = x_1^4 - 3\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}\right) = x_1^4 - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4}$

$$= \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ!!!