



ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.

By infomathanelixis karditsa

www.infomath-anelixis.gr

ΘΕΜΑ Α

A1] Απόδειξη σελ 186 σχολικού

A2] Θεωρία σελ 142 σχολικού

A3] Θεωρία σελ 161 σχολικού

A4] α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος



ΘΕΜΑ Β : $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
 $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

B1 $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow h(x) = (x-1)^2$

$$\begin{array}{c|c|c} x \in A_g & x \geq 0 & x \geq 0 \\ g(x) \in A_f & \sqrt{x} \leq 1 & x \leq 1 \end{array} \quad D_{f \circ g} = [0, 1]$$

B2 Για κάθε $x_1, x_2 \in A_h$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - 1)^2} = \sqrt{(x_2 - 1)^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow \begin{array}{c} -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ x_1, x_2 \in [0, 1] \end{array}$
 άρα η $h(x)$ είναι "1-1"

Θέσω $h(x) = y \Rightarrow (x-1)^2 = y \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{y} \Rightarrow \underbrace{|x-1|}_{\geq 0} = \sqrt{y} \Rightarrow 1-x = \sqrt{y} \Rightarrow x = 1-\sqrt{y}$

άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$
 $x \in [0, 1]$

B3]
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

i) στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{1-\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{1}{2}$ οπότε η φ συνεχής στο $x_0 = 1$

μ ε $\varphi(0) = \frac{h^{-1}(0)}{1-0} = \frac{1-\sqrt{0}}{1} = 1$

ΑΡΑ: • Η φ συνεχής στο $[0, 1]$

• $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

επομένως η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρ. ενδιαμέσων τιμών.

ii) Θέτω $k(x) = \varphi(x) - \eta/\alpha$

- k συνεχής στο $[0, 1]$

- $k(0) = \varphi(0) - \eta/\alpha = 1 - \eta/\alpha > 0$, $\alpha \in (\frac{\eta}{6}, \frac{\eta}{2})$

- $k(1) = \varphi(1) - \eta/\alpha = \frac{1}{2} - \eta/\alpha < 0$, $\alpha \in (\frac{\eta}{6}, \frac{\eta}{2})$

Άρα από θ. Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$k(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) = \eta/\alpha$$

ΘΕΜΑ 5:

$f(0)=0$, f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$$

Γ1 $\forall x < -1$: έχω $f'(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = (-2x)' \xrightarrow[\text{ΑΜΤ}]{\text{ΣΥΝ}}$ $f(x) = -2x + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + C_1) = 2 + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -2$$

$$\text{άρα } f(x) = 2x - 2, \forall x < -1$$

$\forall x > -1$: έχω $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = (x^3 - x)' \xrightarrow[\text{ΑΜΤ}]{\text{ΣΥΝ}}$ $f(x) = x^3 - x + C_2$

$$f(0) = 0 \text{ άρα για } x = 0 \text{ έχουμε } f(0) = 0^3 - 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{άρα } f(x) = x^3 - x, \forall x > -1$$

Γ2 για $x > -1$ έχουμε $f(x) = x^3 - x$

το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής

$$\text{οπότε } \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\text{εχουμε } \varepsilon: y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1) \cdot (x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon: y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) \quad \textcircled{1}$$

αυτή που ψάχνω τέμνει τον $y'y$ στο $A(0, -2)$

$$\text{Λεε } \text{άρα } \varepsilon: -2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1) \cdot (-x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon: -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Rightarrow \varepsilon: 2x_0^3 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$\text{οπότε } \textcircled{1} \Rightarrow \varepsilon: y - 1^3 + 1 = (3 \cdot 1^2 - 1)(x - 1) \Rightarrow \varepsilon: y = 2x - 2$$

$$\underline{\Gamma_3} \quad M(x(t), y(t)) \rightsquigarrow M(x(t), 2x(t)-2), t \geq 0$$

$M \in \varepsilon$

Μπιλιούσης Σπύρος-Σταυρακούδη Φωτεινή

$$\Gamma(2,0) \text{ και } x'(t_0) = 2 \text{ km/sec}$$

έχω $\mu\hat{K}\Gamma = 90^\circ$ άρα $E_{MK\Gamma} = \frac{y(t) \cdot (x(t)-2)}{2} \Rightarrow E_{MK\Gamma} = \frac{(2x(t)-2)(x(t)-2)}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{MK\Gamma} = \frac{2x^2(t) - 4x(t) - 2x(t) + 4}{2} \Rightarrow E_{MK\Gamma} = \frac{2x^2(t) - 6x(t) + 4}{2} \Rightarrow E_{MK\Gamma} = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

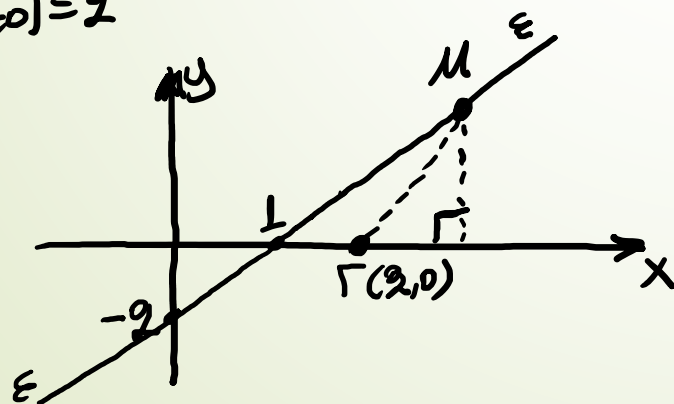
θεωρώ $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

την t_0 έχω $x(t_0) = 3$
 $x'(t_0) = 2$

και $E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t)$ οπότε $E'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) - 3x'(t_0)$

$$\Rightarrow E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2$$

$$\Rightarrow E'(t_0) = 12 - 6 \Rightarrow E'(t_0) = 6 \text{ km/sec}$$



$$\boxed{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{nx f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x-2) = -2 \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\left| \frac{nx f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |nx f(x)| \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\text{οπότε } -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{nx f(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{|f(x)|} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ΚΡΙΤ. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx f(x)}{f(x)} = 0$$

$$\bullet \text{Θετώ } -x = u \Rightarrow x = -u$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} -x = +\infty$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\text{οπότε } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3-4}{u^3+1} = 1$$

οιρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0 + L = L$

ΘΕΜΑ Δ: $f(x) = x - \ln 3x, x > 0$

Δ1 i) η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x}$

• $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \xrightarrow{x \neq 0} x-1=0 \Rightarrow x=1$

• $f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \xrightarrow{x > 0} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

x	0	Δ_1	1	Δ_2	$+\infty$
f'		-	0	+	
f		$\searrow$	T.E	$\nearrow$	

στο $\Delta_1 = (0, 1]$ η $f \downarrow$ συνεχώς
 ορα: $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [1 - \ln 3, +\infty)$
 ≤ 0

$$\rightarrow f(1) = 1 - \ln 3$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln 3x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \ln 3x) = 1 - \ln 3$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(1 - \frac{\ln 3x}{x} \right) \right] = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3x}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{3x}}{\frac{3}{3x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

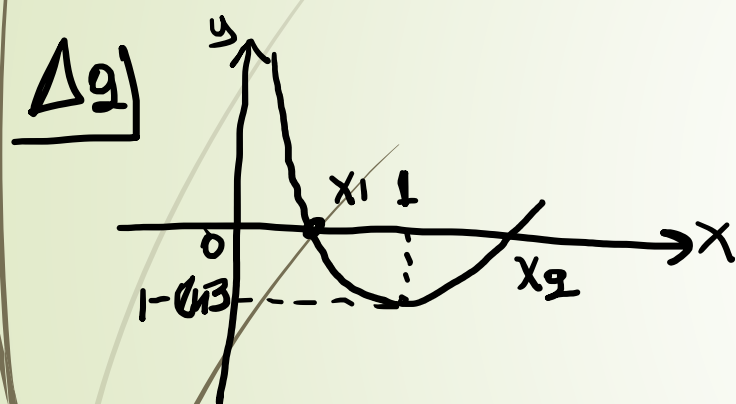
άρα $0 \in f(\Delta_2)$ η $f \nearrow$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τ.ω
 $f(x_2) = 0$

$0 \in f(\Delta_1)$ η $f \searrow$ στο Δ_1 άρα υπάρχει
 μοναδικό $x_1 \in (0, 1]$ τ.ω

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1 - \ln 3, +\infty)$$

$x_1 \neq 1$ άρα $f(x_1) \neq 0$ $f(x_1) = 0$

$$ii) f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0, \text{ η } f \text{ κορυφή } \forall x > 0$$



$$E = - \int_{x_2}^{x_1} (x - \ln 3x) dx = \int_{x_2}^{x_1} (x - \ln 3x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_2}^{x_1} - \int_{x_2}^{x_1} \ln 3x dx = \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2) - [x \ln 3x]_{x_2}^{x_1} + \int_{x_2}^{x_1} x \cdot \frac{1}{3x} 3 dx$$

$$= \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2) - (x_1 \ln 3x_1 - x_2 \ln 3x_2) + \int_{x_2}^{x_1} 1 dx =$$

$$= \frac{1}{2} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1^2 - x_2^2) + (x_1 - x_2) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)$$

$$= (x_1 - x_2) \cdot \left[\frac{1}{2} (x_1 + x_2) - (x_1 + x_2) + 1 \right]$$

$$= (x_1 - x_2) \left[-\frac{1}{2} (x_1 + x_2) + 1 \right] = (x_1 - x_2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (x_1 + x_2 - 2)$$

$$= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

αφού $x_1 - \ln 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \ln 3x_1$

$x_2 - \ln 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \ln 3x_2$

Δ3] α' τρόπος

$$f(2-x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2-x_1) < f(x_1) \xrightarrow{f \downarrow} 2-x_1 > x_1 \Leftrightarrow 2 > 2x_1 \Leftrightarrow x_1 < 1$$

που ισχύει

β' τρόπος

$$x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow 2-x_1 > 1$$

$$\text{είναι } E \geq 0$$

και f μη μονοτονική
παύου στο (x_1, x_2)

$$\text{άρα } E > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\underbrace{x_2 - x_1}_+) (x_1 + x_2 - 2) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } x_1 + x_2 - 2 > 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 2 - x_1 < x_2 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } 1 < 2 - x_1 < x_2 \quad \text{άρα } (2 - x_1) \in (1, x_2) \subseteq (x_1, x_2)$$

$$\text{και } f(x) < 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

$$\text{άρα } f(2-x_1) < 0$$

Δ4] η $\varepsilon \subset \rho$ στο $\mathcal{M}(x_2, f(x_2)) \rightsquigarrow \mathcal{M}(x_2, 0)$
 είναι $\varepsilon: y - 0 = f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow \varepsilon: y = f'(x_2)(x - x_2)$ η $f \upharpoonright \varepsilon \forall x \in A_f$

$$\text{άρα } f(x) \geq \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow f(x) + 1 \geq 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

" = " για το x_2

έστω $2f(x) + 0.3 \geq f(x) + 1 \Rightarrow f(x) \geq 1 - 0.3$ που ισχύει επίσης απ' το 1 που ισχύει ισότιμα

οπότε $2f(x) + 0.3 \geq f(x) + 1 \geq 1 + f'(x_2)(x - x_2)$

" = " για $x = 1$
 " = " για $x = x_2$
 $x_2 \neq 1$

άρα δεν έχει λύση