

Αρχή 1^{ης} Σελίδας

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών και Σπουδών
Οικονομίας & Πληροφορικής.

Σάββατο 13 Μαΐου 2023

ΘΕΜΑ Α

A1/ Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(Μονάδες 6)

A2/ i) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. (Μονάδες 3)

ii) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f , σε ένα διάστημα Δ . (Μονάδες 3)

A3/ Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

α) Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ)
(Μονάδα 1)

Τέλος 1^{ης} Σελίδας

Αρχή 2^{ης} Σελίδας

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 2)

A4 | Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος:

- α) Κάθε κατακόρυφη ευθεία, έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
- β) Αν f συνεχής στο $[a, b]$ τότε το $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$
- γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κάποιό διαστήμα $[a, b]$ στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- δ) Αν $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, με f συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.
- ε) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- (Μονάδες 10)

Τέλος 2^{ης} Σελίδας

Αρχή 3^{ης} Σελίδας

ΘΕΜΑ Β: (by askisopolis)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1+e^x, & x < 0 \\ x^2+4x+a, & x \geq 0 \end{cases}$

B1 Να υπολογίσετε το a . (Μονάδες 4)

B2 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f . (Μονάδες 5)

B3 Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα. (Μονάδες 5)

B4 Αιτιολογήστε αν η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1} . (Μονάδες 5)

B5 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείουν η CF , η CF^{-1} και οι ευθείες $x=2$ και $x=3$. (Μονάδες 6)

Τέλος 3^{ης} Σελίδας

Αρχή 4^{ης} Σελίδας

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία
 ισχύει ότι:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(0) = 1$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι $g(x) = e^x$ (Μονάδες 5)

Γ2 | Αν $h(x) = g(x) + \ln g'(x) + \frac{x+1}{1-x}$ να αποδείξετε ότι
 $h(x) = e^x + \frac{1+x}{1-x}$ και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος ριζών
 της εξίσωσης $h(x) = 0$ (Μονάδες 6)

Γ3 | Αν $x_0 \in \mathbb{R} - \{1\}$ να δείξετε ότι η εφαπτομένη
 της $g(x) = e^x$ στο σημείο x_0 είναι η $\varepsilon: y = e^{x_0} \cdot x - e^{x_0} \cdot x_0 + e^{x_0}$
 και στη συνέχεια να δείξετε ότι εφαπτάται της $t(x) = \ln x$ αν
 και μόνο αν $h(x_0) = 0$. (Μονάδες 7)

Γ4 | Να βρείτε το πλήθος των κοινών εφαπτομένων της g και
 της t . (Μονάδες 3)

Γ5 | Να προσδιορίσετε την ε_{Cg} για $x_0 = 1$ και να βρείτε
 την απόσταση του σημείου $\Lambda(1, 3)$, από αυτήν. (Μονάδες 4)

Τέλος 4^{ης} Σελίδας

Αρχή 5^{ης} Σελίδας

ΘΕΜΑ Δ: (Μάκης Χατζόπουλος - Θωμάς Προδημαζάς)

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f(x) = x^2 - \sin x + \mu x - 1 - f(0), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Δ1/ Να βρείτε την τιμή $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - \sin x$ (Μονάδες 6)

Δ2/ Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

Δ3/ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μοναδικές ρίζες x_1, x_2 τέτοιες ώστε $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ρίζες αυτές είναι αντίθετες. (Μονάδες 7)

Δ4/ Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ της C_f και του άξονα $x'x$, είναι ίσον με $2\left(\eta\mu x_2 - \frac{x_2^3}{3}\right)$, όπου x_2 είναι η μεγαλύτερη της εξίσωσης $f(x) = 0$ από το ερώτημα Δ3. (Μονάδες 7)

Τέλος 5^{ης} Σελίδας