

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 19 Μαΐου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ/ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A.1] Να αποδείξετε ότι $(a^x)' = a^x \ln a$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $a > 0$.

(Μονάδες 5)

A.2] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ(σωστή) ή Λ(λανθασμένη)

α) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β) Αν η f είναι ορισμένη στο $[a, b]$ και συνεχής στο $(a, b]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, b]$ μία μέγιστη τιμή.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μία μόνο θέση μεγίστου.

δ) Κάθε κατακόρυφη ευθεία, έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

ε) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 10)

A.3] α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[α,β]$; **(Μονάδες 3)**

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη, σε ένα διάστημα $Δ$; **(Μονάδες 3)**

A.4] «Αν η f είναι κυρτή και 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $Δ$, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $Δ$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ) **(Μονάδα 1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 3)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 1 \\ 3x + \alpha, & x < 1 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής.

B.1] Να δείξετε ότι $\alpha = -2$. **(Μονάδες 4)**

B.2] Να δείξετε ότι $f'(1) = 3$ και να βρείτε την εφαπτομένη της c_f στο $A(1, f(1))$. **(Μονάδες 5)**

B.3] Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη στο ίδιο σύστημα αξόνων. **(Μονάδες 4)**

B.4] Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 f(x) dx$$

(Μονάδες 6)

B.5] Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$ και:

$$(f(x)-x)(f(x)+x)=1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ.1] Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ και έπειτα να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα (αν υπάρχουν). (Μονάδες 5)

Γ.2] Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή, να βρείτε τις ασύμπτωτες της c_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 5)

Γ.3] Να αποδείξετε ότι από το σημείο $O(0,0)$, δεν άγεται καμία εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 6)

Γ.4] Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f(x+1) - f(2x-1))$

(Μονάδες 4)

Γ.5] Να λύσετε την εξίσωση $e^x + \sqrt{x^2 + 1} = x + 2$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=3$, $f'(0)=0$ και $f'(1)=2$. Η ευθεία (ε): $y=2x+2$ εφάπτεται με τη γραφική παράσταση της f .

Δ.1] Να αποδείξετε ότι $f(1)=4$ **(Μονάδες 3)**

Δ.2] Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Δ.3] Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)

Δ.4] Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+2)-f(x^2) \leq f(x+4)-f(x+2)$

(Μονάδες 4)

Δ.5] Θεωρούμε τη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [0, +\infty)$ και $g(x) = f(x)$, $x \in \Delta$

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1}

ii) Αν η g^{-1} είναι συνεχής στο $g(\Delta)$, να υπολογίσετε το όριο

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x)$$

iii) Αν η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(3, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 8)