

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ/ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)**

ΘΕΜΑ Α

A.1] Έστω 2 συναρτήσεις f, g ορισμένες σε διάστημα Δ . Αν οι f και g , είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\forall x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

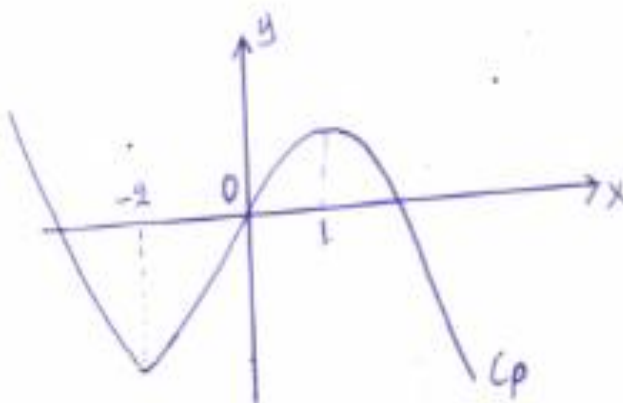
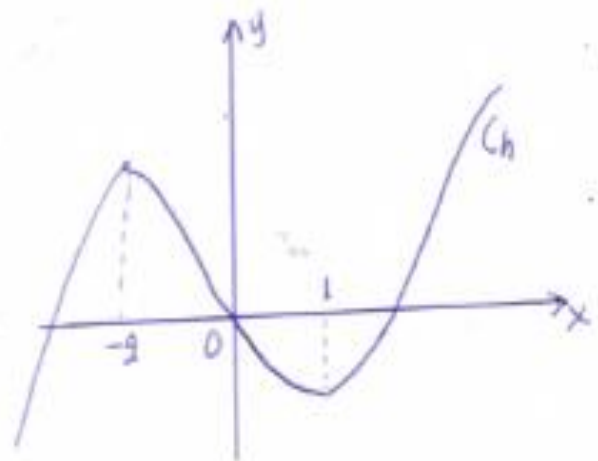
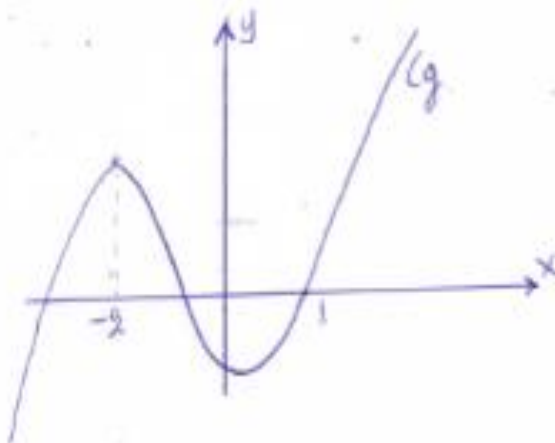
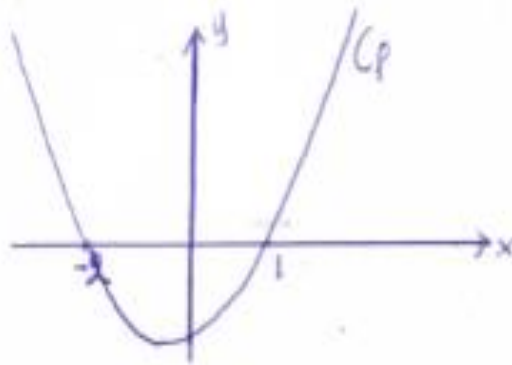
(Μονάδες 7)

A.2] Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

(Μονάδες 3)

A.3] Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h, p

να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις g, h, p έχει παράγωγο τη συνάρτηση f . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



A.4] Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ η οποία παρουσιάζει κρίσιμα σημεία. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό.

«όλα τα κρίσιμα σημεία της f , αποτελούν θέσεις τοπικών ακροτάτων της.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής) **(Μονάδα 1)**

β) Αιτιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) **(Μονάδες 3)**

A.5] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

α) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = -\infty$ αν $\nu \in \mathbb{N}$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$, τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

γ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ , μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f , είναι πάντα διάστημα.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ με $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση f , πολυωνυμική $2^{\text{ου}}$ βαθμού με:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \eta\mu \frac{1}{x^2} + \frac{\eta\mu 2x}{2(\sqrt{x+1}-1)} \right]$$

Αν γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο, $K(\sqrt{2}, 4)$, είναι η ευθεία $(\zeta): y = 2\sqrt{2}x$, τότε:

B.1] Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$

(Μονάδες 2)

B.2] Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f , είναι $f(x) = x^2 + 2$

(Μονάδες 6)

B.3] Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

B.4] Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ $x_0 \in \mathbb{R}$, έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(x) = x^3 + f'(-1)x^2 + f''(1)x + f'(-1)f(-1) \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ.1] Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 18$

(Μονάδες 6)

Γ.2] Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

(Μονάδες 5)

Γ.3] ΑΝ x_1, x_2 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε:

$$f''(x_0) + \frac{f'(x_0)}{x_0} = 0$$

(Μονάδες 7)

Γ.4] Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, με $x \geq 0$ και $x=x(t), y=y(t) \quad t \geq 0$

Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M , είναι $y'(t)=45x'(t)$, αν υποθέσουμε ότι $x'(t)>0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- η συνάρτηση f'' είναι γνησίως φθίνουσα.
- Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $f'(x) < -1$
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1 - \sqrt[3]{x})\eta\mu^5(x - 1)}{(x - 1)^6}$$

Δ.1] Να δείξετε ότι:

i) $f(1) = -1$ ii) $f'(1) = -1$

(Μονάδες 5)

Δ.2] Να δείξετε ότι $f''(1)=0$ **(Μονάδες 5)**

Δ.3] i) Να δείξετε ότι για κάθε $x < 1$, ισχύει $f(x) > -x$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(Μονάδες 6)

Δ.4] i) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x) \ln(x - x_0)}$

(Μονάδες 5)

Δ.5] Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(\alpha^2, \alpha+1)$, $\alpha > 0$, από την εφαπτομένη της c_f στο σημείο με $x_0=1$, δεν γίνεται για καμία τιμή του α , μέγιστη ή ελάχιστη.

Καλή επιτυχία!!!