



Μαθηματικά Ο.Π Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Προσέκδοση
2022

by infomath anelaxis

ΘΕΜΑ Α :

A1/ Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G μια παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

(Μονάδες 7)

A2/ Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle (Μονάδες 2)
και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία (Μονάδες 2)

A3/ Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , παρουσιάζει
στο $x_0 \in A$, τοπικό μέγιστο;
(Μονάδες 4)

A4/ Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος":
α) Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$, τότε οπωσδήποτε θα είναι $f(x) = 0$, για





κάθε $x \in [a, b]$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

γ) Αν για μια συνεχή συνάρτηση, στο διάστημα $\Delta = [a, b]$ ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε η f δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος ριζών στο $[a, b]$

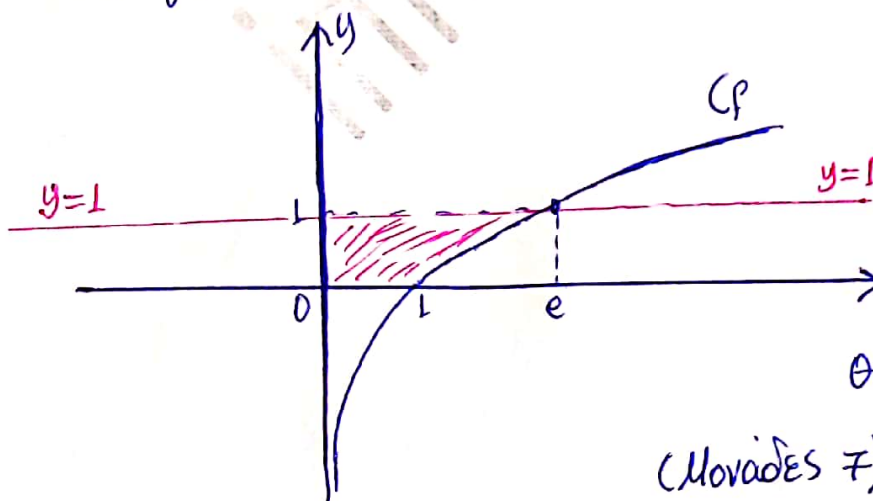
δ) Ισχύει $(x^v)' = v \cdot x^{v-1}$ για κάθε $v \in \mathbb{Z}$

ε) Αν $a = b$, τότε $\int_a^b f(x) dx = 0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β: (Μηιλιάδης Σπύρος)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

Ος γνωστόν η C_f είναι η εξής:



(Μονάδες 7)

Β1 Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του άξονα $y'y$, του $x'x$ της ευθείας $y=1$ και της C_f , από ποια πράξη ολοκληρώνεται θα υπολογιστεί; υπολογίστε το εν λόγω εμβαδόν;





B2 | Η $g(x) = \frac{1}{x-1}$, τη μετατόπιση της $f(x) = \frac{1}{x}$ αποτελεί; (Μονάδες 2)

Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα της f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων και να αναφέρετε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 5)

B3 | Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h(x) = f \circ g(x)$ (Μονάδες 3)

B4 | Αν $h(x) = -\ln(x-1)$ να αποδείξετε, ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1} . (Μονάδες 4)

B5 | Να μελετήσετε την h^{-1} ως προς μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής. (Μονάδες 4)

infomath anelixis





ΘΕΜΑ Γ (Σήφης Βοσκάκης by Lisari team - Παραλλαγή)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+k} - x)$ με $k > 0$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $k > 0$:

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι "1-1" (Μονάδες 4)
- β) Η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, το οποίο ανήκει στον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

Γ2 | Αν $a, b > 0$ με $b-a=1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx \quad (\text{Μονάδες 5})$$

Γ3 | Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $k=1$ και να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 7)

Γ4 | Για $k=1$, να αποδείξετε ότι η f έχει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων και έπειτα να υπολογίσετε την παράσταση $k = f(\ln^2 x + \sin^2 x) + 3 + f(-1) - e^{\ln 3} - \int_9^3 \frac{x^2-3x}{\ln(x^2+1)} dx$ (Μονάδες 6).





ΘΕΜΑ Δ : (Μπιλιούσης Σπύρος)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + 2$ και $g(x) = 1 - x^2$

- Δ1 | Να ορίσετε την συνάρτηση $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (Μονάδες 2)
Να υπολογίσετε την παράγωγο $R'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 2)
Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} R(x)$ (Μονάδες 3)
Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$ (Μονάδες 2)

Δ2 | Να αποδείξετε ότι η $R(x)$ γράφεται και ως:

$$R(x) = -\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \quad (\text{Μονάδες 2})$$

Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της R έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$ (Μονάδες 3)

Δ3 | Να βρείτε όλες τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g (Μονάδες 6)

- Δ4 | i) Έστω ότι κάποια εφαπτομένη του Δ3 είναι η $(E): y = -2x + 2$.
Βρείτε την απόσταση ενός σημείου $M(0, 1)$ απ' την E . (Μονάδες 2)
ii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 f(x) dx > 0ne^{-4}$ (Μονάδες 3).