

Μαθηματικά Ομάδας προσανατολισμού
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ και ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ / ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Σάββατο 25/05/2024

Αρχη 1^{ης} σελίδας

Θέμα Α :

A1 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$.
Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) \quad (\text{Μονάδες 8})$$

A2 Να εκφράσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

α) Λοχύει ότι $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

β) Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδενισμένη στο $[a, b]$
τότε η f παίρνει 2 ετερόσημες τιμές.

γ) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία λοχύει $f'(x) = 0$ για κάθε
 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, είναι σταθερή στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής
συνάρτησης f , είναι διάστημα.

ε) Λοχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Μονάδες 10)

Τέλος 1^{ης} σελίδας

Αρχή 2ης σελίδας

- A3/ i) Να δώσετε τον ορισμό του κρίσιμου σημείου, για μια συνάρτηση f , σε ένα διάστημα Δ (Μονάδες 4)
 ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle (Μονάδες 3)

Θέμα Β: (Ζανταριδής)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 1, & x < 1 \\ bx^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

- B1/ Να δείξετε ότι
 $a = b = 2$

(Μονάδες 6)

- B2/ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ), της C_f , στο σημείο της $M(1, f(1))$ (Μονάδες 4)

- B3/ Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία (ϵ) και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$ και $x=2$. (Μονάδες 7)

- B4/ Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{f(-x)} \right) \cdot \sin x$ (Μονάδες 8)

Τέλος 2ης σελίδας

Αρχή 3^{ης} σελίδας

Θέμα Γ: Πάσης - Τρύφων παραλλαγή

Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $f'(x) \cdot f(x) - x f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) - 2xf'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή. (Μονάδες 5)

Γ2 | Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f , είναι:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{Μονάδες 5})$$

Γ3 | Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 4)

Γ4 | Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in [0, 1]$, ώστε ο αριθμός μεταβολής της f στο ξ , να ισούται με $\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

Γ5 | Έστω $g(x) = \ln x$, $x > 0$. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 4)

Τέλος 3^{ης} σελίδας



ΑΡΧΗ 4^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ

Θέμα Δ. lisari.blogspot

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1/ Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής K , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του. (Μονάδες 2)

Δ2/ Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η f παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 3)

Δ3/ Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 και $K(-1, \lambda+3)$ το σημείο καμπής της C_f , τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $x_1 < -1 < x_2$ (Μονάδες 5)

ii) Αν $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$, να αποδείξετε ότι το K είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Μονάδες 4)

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο καμπής K , είναι $y = -(1+3) \cdot x$ και έπειτα ότι $(x+1) \cdot f(x) \geq -(1+3)(x^2+x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

iv) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείουν η (ϵ), η C_f και οι ευθείες $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείουν η (ϵ), η C_f και οι ευθείες $x = -1$ και $x = x_2$ (Μονάδες 6)

Τέλος 4^{ης} Σελίδας