

Προσφορώση Πανελλαδικών εξετάσεων

Μαθηματικά Ομάδας προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών & Σπαρδών
Οικονομίας και Πληροφορικής

Θέμα Α :

A1] Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 , εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$ (Μονάδες 6)

- A2] i) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και νιοστή παράγωγο της f ; (Μονάδες 3)
ii) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της f ; (Μονάδες 3)
iii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του. (Μονάδες 3)

Τέλος 1^{ης} σελίδας

Αρχή 2^{ης} σελίδας

A3] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος, γράφοντας (Σωστό) ή (Λάθος):

i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε κατ' αναγκή ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\lambda$$

ii) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε υποχρεωτικά το x_0 , δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

iii) Αν μια συνάρτηση f , είναι κοίτη σ' ένα διάστημα Δ , τότε σε κάθε σημείο του Δ , η εφαπτομένη της C_f , βρίσκεται κάτω απ' την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

iv) Αν $a < b$ και $c > 0$, τότε το $\int_a^b c \, dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με βάση $b-a$ και ύψος c .

v) Αν $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, στο $\Delta = [a, b]$ θα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

(Μονάδες 10)

 Τέλος 2^{ης} σελίδας

Θέμα Β: (lisari team)Αρχή 3^{ης} σελίδαςΔίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$

B1] Μελετήστε την f , ως προς τη μονοτονία της και τα ακρότατα της (αν έχει). (Μονάδες 6)

B2] Μελετήστε την f , ως προς την κορτιά της και να βρείτε σημεία καμπής (αν έχει). (Μονάδες 7)

B3] Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της C_f , η οποία "διαπερνά" την C_f . (Μονάδες 4)

B4] Να βρείτε όλες τις κατακόρυφες, πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, (εφόσον υπάρχουν) και να σχεδιάσετε έπειτα την C_f . (Μονάδες 5)

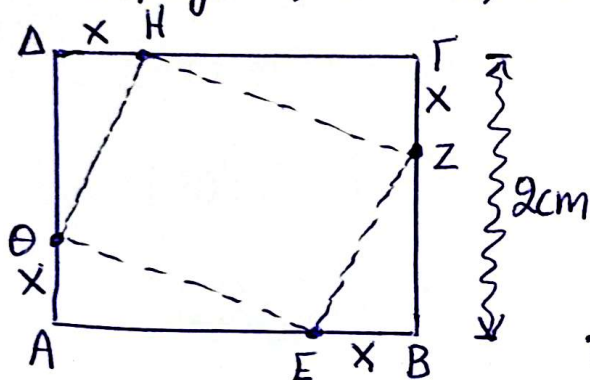
B5] Βρείτε το εμβαδόν που περικλείουν η C_f , ο άξονας $y'y$, η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και η κατακόρυφη ευθεία $x=3$. (Μονάδες 3)

Τέλος 3^{ης} σελίδας

Αρχή 4^{ης} σελίδας

Θέμα Γ: (Επαναληπτικές εξετάσεις 2017-εμπλουτισμένο)

Δίνεται το τετράγωνο $ABΓΔ$ με πλευρά 2 cm και το τετράγωνο, $EZHΘ$, όπως στο σχήμα:



Γ1] Εκφράστε την πλευρά EZ , ως συνάρτηση του x (Μονάδες 5)

Γ2] Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $EZHΘ$ δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 2x^2 - 4x + 4$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της E . (Μονάδες 7)

Γ3] i) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του $EZHΘ$, ως προς x , για $x=1$. (Μονάδες 2)

ii) Βρείτε για ποιές τιμές του x , το εμβαδόν του $EZHΘ$, γίνεται ελάχιστο και για ποιές μέγιστο. (Μονάδες 3)

Γ4] Εξετάστε αν υπάρχει $x_0 \in A\epsilon$, για το οποίο το εμβαδόν του $EZHΘ$, $E(x_0)$, ισούται με $4 \cdot e^{x_0} + 1$ cm² (Μονάδες 5)

Γ5] Να δείξετε ότι η 2^η παράγωγος της συνάρτησης $t(x) = k(x) + e^x$, είναι σταθερή συνάρτηση, εκεί που ορίζεται.

Όπου $k(x)$, η συνάρτηση που εκφράζει το υπολοίπομενο εμβαδόν, εκτός $EZHΘ$, μέσα στο $ABΓΔ$. (Μονάδες 3)

 Τέλος 4^{ης} σελίδας

Θέμα Δ: (Μπιλιούσης Σπύρος) Αρχή 5^{ης} σελίδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$

Δ1] Να αποδείξετε ότι η C_f έχει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων, $\forall x \in Af$. (Μονάδες 3)

Δ2] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^3 f(x) dx$ (Μονάδες 5)

Δ3] Υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{5-x}{5+x} - \ln 3 + \ln 7}{x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} \quad (\text{Μονάδες 5})$$

Δ4] Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2x \cdot f'(x)}{25 - x^2}$, και έπειτα να δείξετε ότι η C_f είναι κατω από κάθε εφαπτομένη ε της, για κάθε $x > 0$, με εξαίρεση το σημείο επαφής, δεδομένου ότι $x > 0$ αλλά ανήκει στο Af . (Μονάδες 5)

Δ5] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln(x+4)$, έχει ταχισιόν μια ρίζα $x_0 \in (-3, 0)$. (Μονάδες 3)

και αν $g(x) = f(x) - \ln(x+4)$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν που σχηματίζουν η C_g , ο $x'x$ και η ευθεία $x=3$ είναι το $E = -\int_{x_0}^3 g(x) dx$ (Μονάδες 4)

Τέλος 5^{ης} σελίδας