

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2021

30/05/2021

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ "Infomath anelaxis", Καρδίτσα

ΘΕΜΑ Α:

A.1] Έστω 2 συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- f, g συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c , τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

(Μονάδες 7)

A.2] «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και 2 φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό x του Δ »

i) Η παραπάνω πρόταση είναι Αληθής ή Ψευδής; (Μονάδες 2)

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

A.3] Εκφράστε με Σ ή Λ :

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$

β) Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ROLLE στο $[\alpha, \beta]$, ικανοποιεί και τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[\alpha, \beta]$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της c_f σε κάθε σημείο του Δ , εκτός του σημείου επαφής, είναι πάνω από τη c_f .

δ) Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της, χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ε) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 10)

A.4] Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, λέγεται ασύμπτωτη της c_f , μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Πότε η ασύμπτωτη αυτή είναι οριζόντια και πότε πλάγια;

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$, $x > -1$

B.1] Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

B.2] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$, $x > -1$, έχει μοναδική λύση τη $x=0$.

(Μονάδες 6)

B.3] Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 7)

B.4] Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) \ln x]$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - e^3}{e^x - 1}$

Γ.1] Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη και τα τοπικά ακρότατα της, αν υπάρχουν.

(Μονάδες 7)

Γ.2] Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της c_f .

(Μονάδες 5)

Γ.3] Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

(Μονάδες 4)

Γ.4] Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ f$. **(Μονάδες 4)**

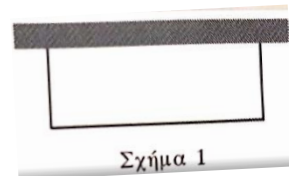
Γ.5] Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη στο $(3, +\infty)$ και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα:

i) σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f^{-1} **(Μονάδες 3)**

ii) να αποδείξετε ότι η cf έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$ **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ Δ:

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις 3 πλευρές (σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x .



Δ.1] Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιοχής που περιφράξαμε, δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = 100x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in (0, 200) \quad \textbf{(Μονάδες 4)}$$

Δ.2] Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε, με το συρματοπλέγμα των 200m. **(Μονάδες 5)**

Δ.3] Έστω $g(x) = f'(x) + x^2 - 99, x > 0$

i) Να εξηγήσετε γιατί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1}$, δεν μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός είτε $x \rightarrow 1^+$ είτε $x \rightarrow 1^-$

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = \ln e^3$, έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα $[1, 5]$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$ με $\xi_1 < \xi_2$, τέτοια ώστε $\frac{g'(\xi_2)}{g'(\xi_1)} = 2 + \eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x$ **(Μονάδες 6)**

Δ.4] Να δείξετε ότι τα σημεία $A(\frac{1}{x_2}, x_2)$ και $B(3-x_1, x_1)$ είναι συμμετρικά ως προς την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1, g(1))$, με x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$

(Μονάδες 5)

Δ.5] Να δείξετε ότι $x^2 \geq 99 + x - f'(x)$, $x > 0$ **(Μονάδες 5)**