

1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α:

A.1] Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 7)

A.2] Να αναπτύξετε τις ταυτότητες:

i) $(3x+5y)^2$ ii) $(x-2y)^3$ iii) $(-2x+3y)^2$ iv) $(-4x-3)^2$ v) $(x-2z+3)^2$

(Μονάδες 6)

A.3] Εκφράστε με Σ ή Λ :

α) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ισχύει $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$

β) Αν $\alpha + \beta = 1$, τότε οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

γ) Αν $\alpha \leq \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

δ) Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$.

ε) Αν $x > y$ τότε και $x-3 < y-3$.

στ) Αν $\kappa^2 + \lambda^2 = 0$ τότε $\kappa = \lambda = 0$.

ζ) Ισχύει ότι $|\alpha^3| = |\alpha|^3$

η) Αν $x > 3$ τότε $|x-3| + 5x = 3 + 4x$

θ) Αν α, β αρνητικοί αριθμοί και ν άρτιος, τότε ισχύει $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$

ι) Το διάστημα $[α,β)$, εκφράζεται από την ανισότητα $α<χ≤β$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β:

B.1] Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(2x+y)^2 + (x-2y)^2 + 5(x+y)(x-y) = 10x^2$$

(Μονάδες 5)

B.2] Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$1 < x < 2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} < y < 1$$

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές:

i) $x+y$ ii) $3x+2y$ iii) $x-y$ iv) xy v) $\frac{y}{x}$

(Μονάδες 10)

β) Απλοποιήστε τη παράσταση $|x-2| + |y-1| + |y-x| - 3$

(Μονάδες 5)

B.3] Δίνεται η παράσταση $A = \left[(x^3 y)^{-3} \cdot (y x^3)^2 \right] : \left(\frac{y^{-2}}{x^3} \right)^2$

Αν x, y αντίστροφοι αριθμοί, βρείτε την τιμή της παράστασης A .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ:

Γ.1] Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{15} \cdot \frac{9}{x^2 - 4y^2}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{3x - 6y}{5x + 10y}$ **(Μονάδες 7)**

β) Αν ισχύει ότι $A = \frac{6}{5}$, να δείξετε ότι $\frac{x}{y} = -6$ **(Μονάδες 5)**

Γ.2] α) Αν $\alpha - \beta = 2$, υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha(\alpha + 3) + \beta(\beta - 3) - 2\alpha\beta \quad \textbf{(Μονάδες 4)}$$

β) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$\alpha^4 + \beta^4 = 1 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$\alpha^6 + \beta^6 = 1 - 3\alpha^2\beta^2$$

τότε να υπολογίσετε την παράσταση

$$B = (3\alpha - 4\alpha^3)^2 + (3\beta - 4\beta^3)^2$$

(Μονάδες 6)

γ) Υπολογίστε τη παράσταση $\Gamma = (A+B)^2 - \sqrt{144} - 9 + 1918$

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ:

Δ.1] Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α, β ισχύει:

$$(\alpha+3\beta)^2 + (5\alpha-\beta)(5\alpha+\beta) + (\beta+3\alpha)^2 \geq 2\alpha(5\alpha-9\beta)$$

(Μονάδες 4)

Δ.2] Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$x^2 + 2y^2 + \omega^2 \geq 2y(\omega - x)$$

(Μονάδες 4)

Δ.3] Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για θετικούς α, β ισχύει η

ανισότητα $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} \geq \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$

και ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} \geq 4$

(Μονάδες 6)

Δ.4] Έστω $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha + \beta = 1$ να δείξετε ότι $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$

(Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!