

Διαγώνισμα εισαγωγικό στα Μαθηματικά Γ Λυκείου (1^ο Διαγώνισμα)

ΘΕΜΑ Α

A.1] Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

- α)** Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A ;
- β)** Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;
- γ)** Πότε 2 συναρτήσεις λέγονται ίσες; **(Μονάδες 10)**

A.2] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

- α)** Το πεδίο ορισμού της f , είναι το σύνολο A των τεταγμένων των σημείων της c_f .
- β)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία, έχει με τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.
- γ)** Αν f, g, h τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η συνάρτηση $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- δ)** Αν f, g είναι 2 συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$
- ε)** Αν f, g δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.
- στ)** Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, με $a > 0$ και $a \neq 1$, ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$
- ζ)** Η συνάρτηση $f(x) = e^x$, τέμνει τον άξονα $x'x$.

η) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$, έχουν άξονα συμμετρίας τον x'

θ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$, είναι άρτια.

ι) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ια) Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$, με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε η f αποτελεί τη συνάρτηση.

ιβ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

ιγ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

ιδ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$

ιε) Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ **(Μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ Β

Β.1] Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{|x| + 1}{|x| - 1} \quad \text{είναι ίσες.}$$

(Μονάδες 7)

B.2] Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \ln(1 - e^{-2x})$

β) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^x}}$

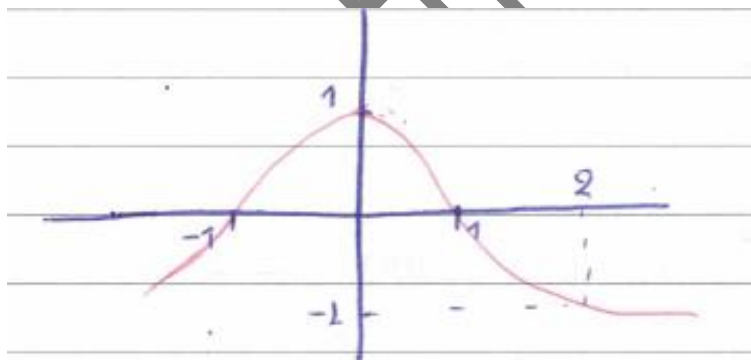
γ) $f(x) = \ln(\eta\mu x)$

δ) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

(Μονάδες 13)

B.3] Για τη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, να βρείτε την τιμή:

$(f \circ f \circ f)(2)$



(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1] Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$f(g(x)) = x^3 + 3x^2 - 6x + 9 \text{ και } f(x) = 3x - 6$$

Να βρείτε τη g

(Μονάδες 4)

Γ.2] Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ και $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$

Να βρείτε τη $g \circ f$ και να την ορίσετε.

(Μονάδες 6)

Γ.3] Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Να βρείτε τη $f \circ g$ και να την ορίσετε.

(Μονάδες 6)

Γ.4] Έστω h, ϕ δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$\phi(x) = 2x + 1 \text{ και } h \circ \phi(x) = 4x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της h

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ f$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1] Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

για κάθε $x \neq 0$

να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{και} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 3|}{4 - f(x)}$$

(Μονάδες 10)

Δ.2] Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$ και β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$

(Μονάδες 15)