

2^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α:

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\chi_{O\gamma}$ και $\chi_{O\gamma'}$.

Μονάδες 7

A2. Αν f, g, h συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται όρια στο x_0 , να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 3

A3. «Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 είναι γνησίως μονότονη.»

α) Να χαρακτηρίσετε με Α ή Ψ την παραπάνω πρόταση για το αν είναι Αληθής ή Ψευδής αντίστοιχα.

Μονάδες 2

β) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ.

α) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και

$$f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$$

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

γ) Αν οι f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντα $f \circ g = g \circ f$.

δ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β:
Β1. Να υπολογίσετε τα όρια.

i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 4}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{\eta\mu x + x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^5 + x - 2}$

Μονάδες 13

 Β2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = l \text{ και } f^3(x) + f(x)\eta\mu^2 x = 2x^2\eta\mu x$$

 α) Να βρείτε το l .

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + xf(x)}$.

Μονάδες 12(5+7)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι η

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad x \in \mathbb{R}$$
 Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή. Μονάδες 6

Γ4. Αν g συνάρτηση με τύπο $g(x) = -\ln x$, να βρείτε τη σύνθεση $f^{-1} \circ g$ και για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της $f^{-1} \circ g$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-5}{x+5}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Μονάδες 6

Δ2. Να ορίσετε την αντίστροφή f^{-1} . Μονάδες 6

Δ3. Αν $f^{-1}(x) = \frac{5e^x + 5}{1 - e^x}$, $x \neq 0$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f^{-1}(x) + \frac{10}{e^x - 1} \right)$

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-3} + \ln(e^{x-5} + 10) = x - 5 + \ln(e\sqrt{x-3} + 10)$

Μονάδες 9

$$\sqrt{x-3} + \ln(e^{x-5} + 10) = x - 5 + \ln(e\sqrt{x-3} + 10)$$

infomath anelaxis