

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ Λυκείου (3^ο Διαγώνισμα)

ΘΕΜΑ Α

A.1] Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι, αν:

- η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

(Μονάδες 7)

A.2] Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \cap B \neq \emptyset$

Αν η $g \circ f$ είναι '1-1', τότε η f αντιστρέφεται.

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; (Μονάδες 2)

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

A.3] Πότε μια συνάρτηση f , λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 3)

A.4] Εκφράστε με Σ ή Λ :

α) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και η γραφική της παράσταση, έχει κοινό σημείο A , με την ευθεία $y=x$, τότε το A ανήκει και στη γραφική παράσταση της αντίστροφης f^{-1} .

β) Κάθε συνάρτηση που είναι '1-1', στο πεδίο ορισμού της, είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό.

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

δ) Ισχύει ότι $[\ln(3x-1)]' = \frac{1}{3x-1}$

ε) Τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$

B.1] Βρείτε τα σημεία τομής της c_f με τους άξονες. (Μονάδες 2)

B.2] Μελετήστε τη μονοτονία της f . (Μονάδες 4)

B.3] Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της και να δικαιολογήσετε τον λόγο για τον οποίο η f , αντιστρέφεται. (Μονάδες 4)

B.4] Να βρεθεί η αντίστροφη f^{-1} . (Μονάδες 7)

B.5] Βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων c_f και $c_{f^{-1}}$

(Μονάδες 4)

B.6] Μελετήστε την f^{-1} , ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1] Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x^4+1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{x}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2)

(Μονάδες 12)

Γ.2] Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ συνεχής και αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$, με τιμές στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία ισχύει

$$f(x) = f^{-1}\left(\frac{x^2 - 3x + 4}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

i) Να δείξετε ότι $f(f(x)) > 0$ **(Μονάδες 4)**

ii) Να δείξετε ότι η f , διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,2)$

(Μονάδες 4)

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=x^3$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα, στο διάστημα (1,2)

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^7+x+1$

Δ.1] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα.

(Μονάδες 4)

Δ.2] Να δείξετε ότι η c_f τέμνει την ευθεία $y=5x-2$, τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$ **(Μονάδες 6)**

Δ.3] Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . **(Μονάδες 7)**

Δ.4] Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι η ευθεία

$$\varepsilon: y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$$

είναι εφαπτομένη της cf^{-1} στο σημείο με τετμημένη $x_1=3$

(Μονάδες 8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!