

ΘΕΜΑ Α:

A1]α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

β) Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη σε κλειστό διάστημα $[α,β]$;

γ) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(α,β)$;

Μονάδες 4

A2] Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$ »

α) Να απαντήσετε αν ο παραπάνω ισχυρισμός είναι Αληθής ή Ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με ένα αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

A3] α) Να αποδείξετε ότι : $(a^x)' = a^x \ln a$

β) Να αποδείξετε ότι : $(\exp x)' = \frac{1}{\exp^2 x}$

Μονάδες 7

A4] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ και ισχύει $f(α)=f(β)$, τότε υπάρχει $\xi \in (α,β)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

β) Αν $f''(x) \neq 0$, τότε η f έχει 3 ρίζες.

γ) Αν η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ και $(α,β)$ αντίστοιχα και $f'(x) \neq 0 \forall x \in (α,β)$, τότε η f δεν είναι 1-1.

δ) Αν η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[α,β]$ τότε η f είναι συνεχής στο

$[\alpha, \beta]$.

ε) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, δεν έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β:

B1] Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

Αν η γραφική παράσταση C_f έχει δύο σημεία $M(x_1, f(x_1))$ και $N(x_2, f(x_2))$ στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον x' , να αποδείξετε ότι:

α) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{3\alpha}$

β) $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$

Μονάδες 8

B2] Να υπολογιστούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\eta \mu x}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [\eta \mu x \cdot \ln(1 - 2^x)]$

Μονάδες 9

B3] Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f συνεχής.

β) Να εξετάσετε αν η f συνεχής στο $x_0=0$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1] Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$ διέρχεται από τα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6$$

Μονάδες 10

Γ2] Δίνεται η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \cdot f'(x)$ με $\beta > a$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$. Μονάδες 7

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε τα σημεία $A(f(\xi), \xi)$, $B(f'(\xi), 1)$ και $O(0, 0)$ να είναι συνευθειακά.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ1] Να εκφράσετε την f' συναρτήσει της f .

Μονάδες 5

Δ2] Να δείξετε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί $f''(0)$. Μονάδες 6

Δ3] Να αποδείξετε ότι f και f' είναι γνησίως αύξουσες.

Μονάδες 7

Δ4] Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \cdot f'(x)$

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!