

**Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ Λυκείου (5<sup>ο</sup> Διαγώνισμα)****ΘΕΜΑ Α**

**A.1]** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0)=0$$

**(Μονάδες 6)**

**A.2]** Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ). Στη συνέχεια να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη ισχύει  $f''(x)>0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ »

**(Μονάδες 4)**

**A.3]** Να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;

β) Τι ονομάζουμε σημείο καμπής μίας συνάρτησης  $f$ ;

γ) Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω;

**(Μονάδες 5)**

**A.4]** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

α) Αν μια συνάρτηση  $f$ , παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της.

β) Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[α,β]$  και σημείο  $x_0 \in [α,β]$ , στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντοτε ισχύει ότι  $f'(x_0)=0$ .

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$ , είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη ισχύει  $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

δ) Αν η  $f$  είναι κυρτή, τότε η εφαπτομένη σε ένα σημείο της  $c_f$ , βρίσκεται πάνω από τη καμπύλη της συνάρτησης, εξαιρουμένου του σημείου επαφής.

ε) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ , μπορεί να είναι και άκρα του  $\Delta$ .

(Μονάδες 10)

### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a^x - \ln(x+1), x > -1$ , όπου  $0 < a \neq 1$

**B.1]** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > -1$ , να αποδείξετε ότι  $a=e$ .

(Μονάδες 4)

**B.2]** Να αποδείξετε για  $a=e$ , ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

(Μονάδες 4)

**B.3] i)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1,0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0,+\infty)$ . **(Μονάδες 4)**

ii) Αν  $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1,2)$  **(Μονάδες 7)**

**B.4]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 f(x)dx$  **(Μονάδες 6)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{1-e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ.1] i)** Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς τη μονοτονία της. **(Μονάδες 3)**

ii) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x}$ . **(Μονάδες 2)**

iii) Μελετήστε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης  $c_f$ . **(Μονάδες 3)**

**Γ.2]** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης  $c_f$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ.3]** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $cf$  στο σημείο καμπής.

Έπειτα να αποδείξετε ότι  $f(x)+x-1 \geq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

**(Μονάδες 6)**

**Γ.4]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_{\ln \frac{1}{2}}^0 f'(x) dx$  **(Μονάδες 6)**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a^x + b^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $0 < b < 1$  και  $a > 1$ , για την οποία ισχύουν:

- $a^x + b^x \geq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ , στο  $A(1, f(1))$ ,

είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon): y = \frac{80 \ln 9}{9} x + 1$

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{(x^2 - 1) \ln x}{x}$ ,  $x \geq 1$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ.1]** Η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

**(Μονάδες 5)**

**Δ.2]**  $\beta = \frac{1}{\alpha}$

**(Μονάδες 5)**

**Δ.3]**  $\alpha = \frac{1}{9}$  και  $\beta = \frac{1}{9}$

**(Μονάδες 6)**

**Δ.4]** Υπάρχουν  $\xi_1 \in (0, \frac{1}{2})$  και  $\xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$  τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{8}{3} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{104}{9} \quad (\text{Μονάδες 5})$$

**Δ.5]** Υπάρχει  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$  με  $\xi_1, \xi_2$  από το Δ.4, τέτοιο ώστε

$$\frac{80}{9} < f''(\xi)$$

(Μονάδες 4)

**Καλή επιτυχία!!!**