

1^ο Διαγώνισμα Μαθηματικά Ο.Π Γ Λυκείου 2020-2021

ΘΕΜΑ Α:

A.1] Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ **(Μονάδες 5)**

A.2] Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 που ανήκει στο A , ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

β) Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , λέγεται “1-1”;

(Μονάδες 6)

A.3] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

α) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ’ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))$

β) Αν f και g , δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι ίσες.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί την πρώτη και 3^η γωνία του επιπέδου.

δ) Κάθε “1-1” συνάρτηση, είναι και γνησίως μονότονη.

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

στ) Ισχύει $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

ζ) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ , ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η

ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0$

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \text{ και } g(x) = 2 - x$$

B.1] Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 4)

B.2] Να ορίσετε την $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

B.3] Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

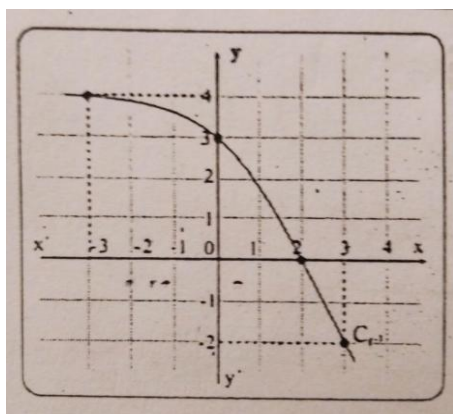
(Μονάδες 6)

B.4] Να βρείτε τη μονotonία της $f \circ g$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ:

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$



Γ.1] Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2f(0) - f^{-1}(0) - 3f^{-1}(2) + f(4) \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

Γ.2] Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(|x| - 1) + 3) = 0$

(Μονάδες 6)

Γ.3] Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(0)\sqrt{x+3} - f(-2)}{x - f^{-1}(3)}$ (Μονάδες 6)

Γ.4] Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(3)x^2 - \alpha x + \beta + f^{-1}(-3)}{x - 2} = -5 \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}{x^2 - 3x}$

Δ.1] Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 5)

Δ.2] Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(Μονάδες 9)

Δ.3] Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

να βρείτε τα:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + f(3x)}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + x^2}{f^2(x) + \eta\mu^2 x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sqrt{x+1} - 1}{f(x) + \varepsilon\varphi x}$

(Μονάδες 11)