

2^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Ο.Π.

ΘΕΜΑ Α:

Α1] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ.

α) Αν οι f και g δεν είναι συνεχείς στο x_0 του πεδίου ορισμού τους, τότε και η $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0

β) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0 .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, η g διατηρεί πρόσημο κοντά στο x_0 και το

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ υπάρχει, αυτό είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο

x_0 .

ε) .Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .

στ) Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού

ζ) Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτομένες στον $x'x$.

η) Αν $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ με $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

(8 μονάδες)

A2] α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β) Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της;

(6 μονάδες)

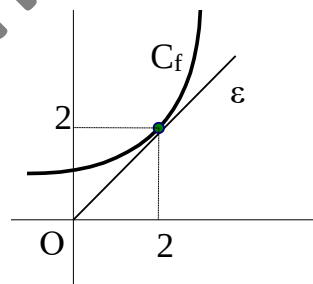
A3] Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f'(x) = vx^{v-1}$.

(5 μονάδες)

A4] Η ευθεία του διπλανού σχήματος είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

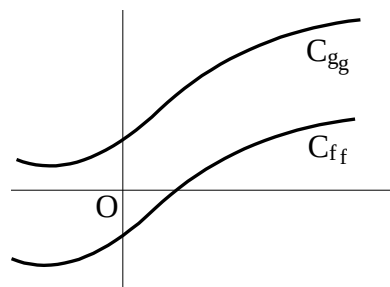
Να υπολογίσετε $f'(2)$.

(3 μονάδες)



A5] Στο διπλανό σχήμα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f . Ισχύει $f'(x) = g'(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

(3 μονάδες)



ΘΕΜΑ Β:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$,

περιττή και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{(x-1)^2} = 3$

B1] Να βρείτε το $f(1)$.

B2] Να δείξετε ότι η f συνεχής στο $x_0=-1$.

B3] Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-3}{x^2+1+2x}$.

B4] Αν ισχύει $x + \eta\mu x \leq x f(x) \leq 2x^2 + x + \eta\mu x$ να βρείτε το $f(0)$ εφόσον η f συνεχής.

(5+6+6+8=25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ:

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{4x^2+1} - x \leq f(x) + x \leq \sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x > 0$$

Γ1] Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Γ2] Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{f(x)}$

Γ3] Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)+1}-1}{f(x)}$

(6+10+9=25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Δ1] Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$

Δ2] Να βρείτε τις εφαπτόμενες στη Cf που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: x-2y+1=0$

Δ3] Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$ με $x \leq x_0$ με $x=x(t), y=y(t), t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(6+8+11=25 μονάδες)

infomath anelaxis