

ΘΕΜΑ Α:

A1] Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

(6 Μονάδες)

A2]α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange και τη γεωμετρική του ερμηνεία (+σχήμα).

β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής.

γ) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να αναφέρετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (+σχήμα).

(3+2+3=8 Μονάδες)

A3] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

1. Το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο $f(A)$ των τετμημένων των σημείων της C_f .

2. Αν $f(α) \neq f(β)$ και η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ $f(α)$ και $f(β)$, τότε f είναι συνεχής στο $[α,β]$

3. Αν x_1, x_2 διαδοχικές ρίζες της συνεχούς συνάρτησης f τότε στο διάστημα (x_1, x_2) είναι $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

4. Μια συνεχής συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[α, β]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(β), f(α)]$.

6. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

7. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(α) \cdot f(β) < 0$.

(8 Μονάδες)

A4] Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$ με $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ A. $f^{(4)}(x_0) = 0$
- ☐ B. $f''(x_0) = 0$
- ☐ Γ. $f'''(x_0) = 0$
- ☐ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα

(3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot e^x - (x+1)$.

B1] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1 \in (0, 2)$.

B2] Να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $-x_1$ είναι ρίζα της $f(x)$.

B3] Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-x_1, x_1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(x_0) - 3x_0^2 \cdot f(x_0) = 0.$$

(6+8+11=25 ΜΟΝ)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 2\eta\mu x + \beta, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \alpha\eta\mu x - \beta x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Έστω $\alpha = \beta = 1$.

β) Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$, όμως υπάρχει σημείο της C_f στο διάστημα αυτό που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

δ) Να βρείτε διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq (-\pi, \pi)$ στο οποίο να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f .

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0 = x_0 - 2017$.

(4+5+4+4+3+5=25 ΜΟΝ)

ΘΕΜΑ Δ:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ $f : (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες :

- $f(\frac{\pi}{2}) = 3$
- $\sin^2 x + f^2(x) = -3 + 4f(x)$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

Δ1] Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Δ2] Να αποδείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x + 2, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Δ3] Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Δ4] Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{f'(x)}$

(7+6+5+7=25 ΜΟΝ)