

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΘΕΜΑ Α:**

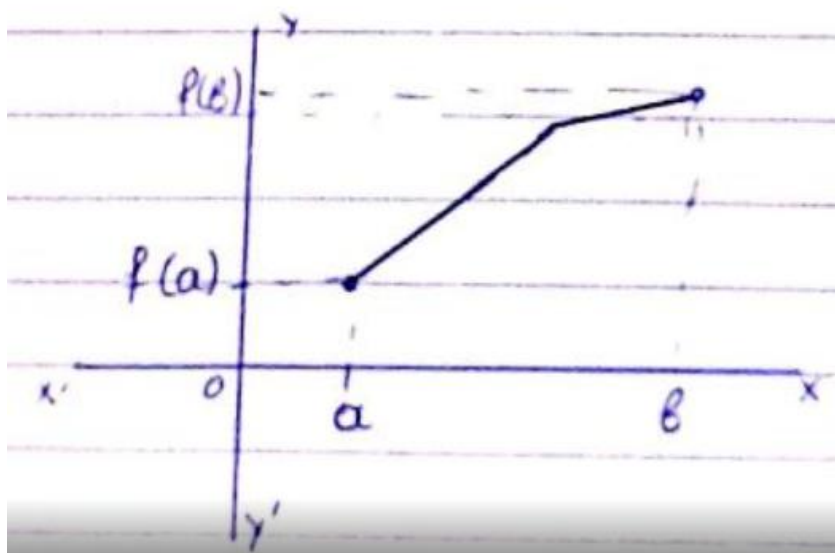
A1] Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ .
- $f'(x)=0 \ \forall$ εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2] «Για τη συνάρτηση που παριστάνει η παρακάτω γραφική παράσταση εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής»



α) Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι Αληθής ή Ψευδής; **Μονάδα 1**

β) Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **Μονάδες 3**

A3]

α) Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y , ως προς το μέγεθος x , για $x=x_0$, αν $y=f(x)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.

β) Τι ονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και γενικά n -οστή παράγωγος μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 6(3+3)**A4] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σ ή Λ:**

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ .

β) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f'(x)>0$.

γ) Υπάρχει συνάρτηση 1-1, για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle.

δ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν δεν υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στο AB , όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$.

ε) Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β:**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)e^x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

B1] Να αποδείξετε ότι $a=1$.**Μονάδες 5****B2]** Να εξετάσετε αν η f , είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. **Μονάδες 7**

B3] Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **Μονάδες 8**

B4] Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + f(e^{x^3})}{x + 2x^2 + 3x^3}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x-1} + ax, x \neq 1, a \in \mathbb{R}$

Γ1] Να βρείτε το a , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$, να είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: x - 3y + 6 = 0$.

Μονάδες 6

Γ2] Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Γ3] Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) - 6}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 6

Γ4] Αν $g(1) = 1$ και $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{3h}$, να βρείτε τον τύπο της g .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f(1) = -1$
- $f'(x)e^{x+f(x)} = 2x - x^2, \forall x \in (0, +\infty)$

Δ1] Να βρείτε τον τύπο της f . **Μονάδες 7**

Δ2] Αν $f(x)=2\ln x-x$, $x>0$, να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

Μονάδες 4

Δ3] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^x + 1) + f(\frac{1}{x}) = f(e^x) + f(\frac{x+1}{x})$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

Δ4] $\forall x > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x + 3) + f(x + 2) > f(x + 3) + f(\eta\mu x + 2)$$

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!