

5^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.**ΘΕΜΑ Α:**

A1] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ , τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

β) Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε θα ισχύει $f'(x) < 0$.

γ) Αν για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , ισχύει $f'(x) = e^x \ln 4$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f , μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

ε) Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο x_0 , στο οποίο δεν είναι συνεχής.

στ) Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο $-x_0$ θα έχει τοπικό μέγιστο.

ζ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

η) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

ι) . Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(10 μονάδες)

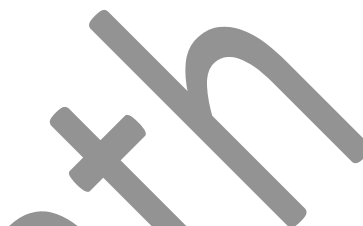
A2] Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(,) \alpha \beta$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $0 x$, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να δείξετε ότι αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

(5 μονάδες)

A3] Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x_0) = -1$. Η γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη μίας C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα $x'x$ είναι:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ i. -45°
- ☐ ii. 60°
- ☐ iii. 135°
- ☐ iv. 0°
- ☐ v. 180°



(3 μονάδες)

A4] .α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ . (3 μονάδες)

β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ .

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x < 0 \\ x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$. Η f παρουσιάζει στο $x=1$ τοπικό ακρότατο.

B1] Να δείξετε ότι $a=-2$. (4 μονάδες)

B2] Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μονάδες)

B3] Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή. (7 μονάδες)

B4] Να αποδείξετε ότι η $f(x)=e^{-x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbf{R}$, η οποία βρίσκεται στο $(2,3)$.

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2 - x)e^x, x \in [0, 2]$

Γ1] Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και να βρείτε σύνολο τιμών. (6 μονάδες)

Γ2] Να δείξετε ότι η C_f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την $y = ax$, για $a > 0$. (5 μονάδες)

Γ3] Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1) \cup (1, 2)$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία ισχύει $f'(x_1) + 1 = a\left(\frac{1}{f'(x_2)} + 1\right)$ (5 μονάδες)

Γ4] Σημείο $M(x, f(x))$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $x'(t) = 2$ cm/sec. Αν $A(x, 0)$ είναι η προβολή του σημείου M πάνω στον x' και $O(0, 0)$ η αρχή των αξόνων να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM τη χρονική στιγμή που το σημείο διέρχεται από το $(1, e)$. (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e \cdot f(x) \cdot f'(1 - x) + 4 = 0$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}}$. Επίσης δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -x^2 - 2x, x \geq -1$

Δ1] Να δείξετε ότι $f(x) = 2e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ (5 μονάδες)

Δ2] Να ορίσετε την $h = f \circ g$, να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφή της και να βρείτε την $h^{-1}(x)$. (6 μονάδες)

Δ3] Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + 2x = \ln(2x + 1)$. (6 μονάδες)

Δ4] Να υπολογίσετε τα : (8 μονάδες)

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 - \eta\mu(x^2 + 2x) - 1}{\ln(x^2 + 2x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{h(x)}{2} \right)^{1/x}$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!