

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ Λυκείου (6° Διαγώνισμα)

ΘΕΜΑ Α

A.1] α) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της c_f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

γ) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

(Μονάδες 6)

A.2] «Αν η f είναι κυρτή και 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$, σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ »

i) Η παραπάνω πρόταση είναι Αληθής η Ψευδής; **(Μονάδα 1)**

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **(Μονάδες 3)**

A.3] Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Να αποδείξετε ότι η f , είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

(Μονάδες 7)

A.4] Εκφράστε με Σ ή Λ :

α) Αν η συνάρτηση f είναι “1-1” στο διάστημα Δ , τότε είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ , μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f , είναι διάστημα.

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $f(\beta) > 0$.

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} , είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x, & x \geq 0 \end{cases}$

Η f παρουσιάζει στο $x=1$, τοπικό ακρότατο.

B.1] Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και έπειτα να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 4)

B.2] Να βρείτε τις $f'(x)$, $f''(x)$ και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Έχει η f σημεία καμπής; (Μονάδες 6)

B.3] Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f . (Μονάδες 6)

B.4] Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Μονάδες 4)

B.5] Χαράξτε την c_f . (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$ και

ισχύει $(f(x)-x)(f(x)+x)=1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Γ.1] Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ και έπειτα να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της. **(Μονάδες 6)**

Γ.2] Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. Βρείτε το σύνολο τιμών της f , τις ασύμπτωτες της c_f και χαράξτε την. **(Μονάδες 8)**

Γ.3] Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f(x+1) - f(2x-1))$
(Μονάδες 5)

Γ.4] i) Λύστε την εξίσωση $e^x + \sqrt{x^2+1} = x+2$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{4}{3})$
(Μονάδες 6)
(3+3)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 9]$ και ένα σημείο $M(x, f(x))$ της c_f .

Δ.1] Να αιτιολογήσετε γιατί στο σημείο $A(0, f(0))$, η c_f δεν δέχεται μοναδική εφαπτομένη. **(Μονάδες 4)**

Δ.2] Να βρείτε το σημείο M της c_f , που απέχει από το σημείο

$K\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, την ελάχιστη δυνατή απόσταση. Έπειτα να βρείτε την απόσταση αυτή. **(Μονάδες 7)**

Δ.3] Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της c_f , στο σημείο M που βρήκατε στο (Δ.2), είναι κάθετη στην KM . **(Μονάδες 6)**

Δ.4] Δίνεται το σημείο $B(\alpha, \beta)$, το οποίο δεν ανήκει στην c_f . Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της c_f , που απέχει από το B λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και τουλάχιστον ένα, σημείο της c_f , που απέχει από το B περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Έπειτα υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + f(x+3) - 3}{x^2 - 1}$. **(Μονάδες 8)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!