ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ο – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α:

Α.1] Να χαρακτηρίσετε με Σ ή Λ

α) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι συνεχής σε αυτό.

β) Αν 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει $x_1>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x>x_1$, να είναι f(x)>0.

δ) Αν f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = l$,τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -l$

στ) Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} f_1(x), x<0 \\ f_2(x), x\geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 , τότε θα ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = f_2(0)$

ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = l$, $l \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

η) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$,ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$.

θ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

ι) Ισχύει ότι (ln2)'= $\frac{1}{2}$. **(Μονάδες 10)**

Α.2]

α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής, σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

β) Πότε μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, λέγεται συνάρτηση '1-1';

γ) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 9)

Α.3] Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β:

Β.1] Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$|f(x)-\eta\mu x| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε αν ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο επαφής $x_0=0$.

(Μονάδες 7)

Β.2]

α) Αν $f(x)=\ln(e^{2x}+1)-x$, τότε να αποδείξετε ότι:

$f''(x)=(1-f'(x))(1+f'(x))$ **(Μονάδες 6)**

β) Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=3\ln(x+2)-\ln 2x$.

Λύστε την εξίσωση $f''(x)=0$. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Γ: Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$2f^3(x)+3f(x)=x+5$$

Γ.1] Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

(Μονάδες 6)

Γ.2] Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε τις ανισώσεις:

i) f(3x)<x

ii) $f^{-1}(x)<x-1$ **(Μονάδες 7)**

Γ.3] Αν $\lim_{x\to 0} f(x)=\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι κ=1. **(Μονάδες 5)**

Γ.4] Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: $A \to \mathbb{R}$ με Α=[0,+ ∞) και

$f(x)=\sqrt{x}$, g(x)=f(x+1)-f(x)

Δ.1] Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ **(Μονάδες 7)**

Δ.2] Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα. **(Μονάδες 5)**

Δ.3] Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^4+2)+f(x^2+1)<f(x^2+2)+f(x^4+1)$

(Μονάδες 6)

Δ.4] Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x)\sigma\upsilon\nu g(x)}\right)$

(Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ