

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3^ο – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α:

A.1] Να αποδείξετε ότι για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g, h , ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

(Μονάδες 5)

Έπειτα να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$k(x) = \ln x \cdot \sqrt{x}$$

(Μονάδες 2)

A.2] Εκφράστε με Σ ή Λ :

α) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η γραφική της παράσταση, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

β) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι υποχρεωτικά παραγωγίσιμη σε αυτό.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν $f'(x) \neq 0$, για κάθε πραγματικό x , τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

ε) Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και $f'(x) \neq 0 \forall x \in (0,2)$, τότε $f(0) \neq f(2)$. **(Μονάδες 10)**

A.3] Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle, αφού διατυπώσετε πρώτα το θεώρημα. **(Μονάδες 5)**

A.4] Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(a)f(b) > 0$, τότε:

α) η εξίσωση $f(x)=0$, δεν έχει λύση στο διάστημα (a,b)

β) η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (a,b)

γ) η εξίσωση $f(x)=0$, έχει τουλάχιστον 2 λύσεις στο διάστημα (a,b)

δ) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$, στο διάστημα (α, β)

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \lambda, & x \leq 1 \end{cases}$$

B.1] Υπολογίστε το λ , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής. **(Μονάδες 4)**

B.2] Εξετάστε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$

(Μονάδες 6)

B.3] Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\zeta): y = -\frac{1}{4}x + 2022$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων σε αυτά τα σημεία.

(Μονάδες 8)

B.4] Βρείτε τις ασύμπτωτες της c_f .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$xf(x) + 1 = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Γ.1] Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f , είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

(Μονάδες 5)

Γ.2] Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της c_f , στο σημείο $A(0, f(0))$.

(Μονάδες 6)

Γ.3] Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x f(x)]$

(Μονάδες 6)

Γ.4] Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε :

$$(\xi^2 - \xi)f'(\xi) = (1 - 2\xi)f(\xi)$$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ:

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{n\mu 2x} = 5$
- $f(2) = 2$
- $f''(x) \neq 0, \forall x \in (0, 2)$

Δ.1] Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 10$

(Μονάδες 8)

Δ.2] Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

(Μονάδες 6)

Δ.3] Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$.

(Μονάδες 5)

Δ.4] Να εξηγήσετε γιατί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο $A(0, f(0))$, δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες και να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $M(-3, 1)$, από την εφαπτομένη αυτή.

(Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία!!!