

Μαθηματικά Ο.Π Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Η^ο διαγωνίσμα
by infomath anelixis

Θέμα Α:

A1 Έστω 2 συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ .
Αν οι f, g συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$, $\forall x$ εσωτερικό
του Δ , να αποδείξετε ότι, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ (Μονάδες 7)

A2 Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης τιμής του
διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική του
ερμηνεία (Μονάδες 5)

A3

α) Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγισίμη στο (a, b) και
χρησιώς φθίνουσα στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο
ώστε $f'(x_0) > 0$.

γ) Έστω $f(x) = \begin{cases} 3, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η
 Cf της δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ε) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου
του 2 η οποία έχει ασύμπτωτη. (Μονάδες 10)

A4/ Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική
ερμηνεία του Fermat για μια συνάρτηση f , ορισμένη στο
διάστημα Δ . (Μονάδες 3)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^4 + bx^3 - x^2 - \frac{1}{3}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$
και $x_2 = 2$, τότε:

B1/ Να δείξετε ότι $a = \frac{1}{4}$ και $b = -\frac{1}{3}$ (Μονάδες 5)

B2/ Μελετήστε την f ως προς μονοτονία και να
καθορίσετε το είδος των ακροτάτων (Μονάδες 7)

B3/ Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο
ώστε $f(x_0) = -2$. (Μονάδες 5)

B4/ Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1$
(Μονάδες 8)

Θέμα Γ: (Ντίνα Ψαθά)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και ισχύει ότι $f'(x) = 2x e^{-x} - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

Γ2 | Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς μονοτονία και ακρότητα (Μονάδες 6)

Γ3 | Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot \ln(x^2 + 3)]$ (Μονάδες 6)

Γ4 | Να βρείτε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \neq 0$, στο οποίο η εφαπτομένη (ϵ) της C_f διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων. Έπειτα, βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κατω απ' την ευθεία ϵ . (Μονάδες 7)

Θέμα Δ: Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$, $\forall x > 0$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$, διέρχεται απ' τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,e)$

Δ1 | Να αποδείξετε ότι $f'(1) = e - 1$ και $f(1) = e$ (Μονάδες 6)

Δ2 | Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - \ln x$ (Μονάδες 7)

Δ3 | Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Μονάδες 5)

Δ4 | Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^+$ (Μονάδες 2)

Δ5 | Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης, ενός σημείου που κινείται στην C_f , την στιγμή το, που

διέρχεται απ' το $M(1, f_{cl})$, αν την το η τετραμμένη του
αυξάνεται με ρυθμό 2 κον/sec. (Μονάδες 5)

Καλή Επιτυχία !!!