

Φροντιστήριο "Infomath-Anelixis"

www.infomath-anelixis.gr

Κουμπουνδαύρου 2, Καρδίτσα

Μπιλιούσης Σπύρος

Σταυρακούδη Φωτεινή

5^ο Διαγωνισμός

2021/2022

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α:

- A1] α) Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f ;
 β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Λ , λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi \in \Lambda$ τοπικό μέγιστο;
 γ) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
 δ) Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[a, b]$.

- A2] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

- α) Αν f συνάρτηση συνεχής στο Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^b f(x) dx$$

- β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ'ανάγκη

υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

- γ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

Ανέλιξις

και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω τότε πάντα ισχύει $f'(x) > 0$.

δ) Αν f, g δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

ε) Ισχύει ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγισίμη στο $[0, +\infty)$.

Α3] Έστω μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και G μια αρχική της f στο $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Α4] Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως Αληθής ή Ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

« Αν η f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγισίμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ».

ΘΕΜΑ Β:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$$

για τις οποίες είναι γνωστό ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $M(1,1)$ και οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο σημείο M είναι κάθετες.

B1] Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$.

B2] Να υπολογίσετε το $\int_1^2 (x+f(x))^2 dx$.

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h=f \cdot g$

B3] Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η h είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η h είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατά της h .

B4] Να βρείτε τις ασύμπτωτες της h και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της h .

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1] Να αποδείξετε ότι $e^x - x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2] Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$[f'(x) - f(x)]e^x = (x-1)f'(x) - f(x)$$

να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x + 1$

Ανέλιξις

Γ3] Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{\lambda^2+3} - e^{2\lambda+2} < 1 - \lambda^2$$

Γ4] Να βρείτε τα A, B ώστε να ισχύει

$$f'(x) - f(x) = Ax + B, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ5] Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{x-2}{e^x \cdot x+1} dx$$

ΘΕΜΑΔ:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x + x \quad \text{και} \quad f(x) = \ln(1 + x e^x)$$

Α1] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 . Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $(x_0, +\infty)$, όπου x_0 η ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Α2] Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Α3] Να αποδείξετε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Α4] Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \eta \eta x \cdot \sin x}{\eta \eta x + e^{\eta \eta x}} dx$$