

Θέμα Α:

A.1 Πότε μια συνάρτηση f , είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, του πεδίου ορισμού της (Μονάδες 4)

A.2 Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο είναι συνεχής.

Αν $\bullet f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και
 $\bullet f'(x) < 0$ στο (x_0, b) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Μονάδες 7)

A.3 Εκφράστε με Σ ή Π :

α) Αν f συνεχής στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$

β) Λόγους ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ αν $0 < a < 1$

γ) Μια συνεχής συνάρτηση, διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της, χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

δ) Αν $f''(x_0) = 0$, τότε στο x_0 η f έχει σημείο καμπής.

ε) Αν f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι "1-1" στο $[a, b]$

(Μονάδες 10)

A.4 "Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$, τότε κατ'ανάγκη ισχύει $a=b$ "

- i) Η παραπάνω πρόταση είναι Αληθής ή Ψευδής; (Μονάδα 1)
- ii) Δικαιολογήστε την απάντησή σας (Μονάδα 1)
- iii) Υπολογίστε το $\int_{-1}^1 x^3 dx$. (Μονάδες 2)

Θέμα Β :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Επίσης ισχύει $f'(x) + 2xf^2(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε και την συνάρτηση $h(x) = x \cdot f(x), x \in \mathbb{R}$

B1 Να δείξετε ότι $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 4)

B2 Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (Μονάδες 6)

B3 Υπολογίστε το $\int_0^1 h(x) dx$ (Μονάδες 4)

B4 Μελετήστε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα. (Μονάδες 4)

B5 i) Λύστε την εξίσωση $f(e^x - 1) + f(x^2 + x - 2) = 2$

ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) \ln 2022x)$

(Μονάδες 7)
(3+4)

Θέμα Γ :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
λοξίων τα εξής:

- $f(x) = \int_0^x (e^t + 1) dt, x \in \mathbb{R}$

- Η g είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί
την σχέση $g(x) + e^{90x} = 2022x + 1, x \in \mathbb{R}$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι, $f(x) = e^x + x - 1$
και στη συνέχεια να βρείτε τις ρίζες της και το πρόσημο της
(Μονάδες 5)

Γ2 | Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από
την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 2$, να αποδείξετε
ότι $E > 8,25$
(Μονάδες 5)

Γ3 | Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
(Μονάδες 5)

Γ4 | Να δείξετε ότι η C_g διέρχεται από την αρχή των
αξόνων.
(Μονάδες 5)

Γ5 | Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(g \circ g)(x) - g(1 - x^{9022}) = 0$,
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Θέμα Δ:

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δ1 | Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής (Μονάδες 3)

Να βρείτε την ασυμπτωτική της f στο $+\infty$ και να δείξετε ότι έχει άπειρα κοινά σημεία με την f . (Μονάδες 5)

Δ2 | Αν $g(x) = e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε, να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείουν οι C_f , C_g και οι ευθείες $x=0$, $x=\pi$ (Μονάδες 6)

Δ3 | Έστω συνάρτηση h με $x > 0$, για την οποία ισχύει

$$h'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad x > 0$$

i) Να βρείτε τον τύπο της $h(x)$, αν $h(\ln 3) = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι η h δεν έχει σημεία μακρυνής, για $x > 0$. (Μονάδες 3)

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 h(x) dx > \frac{\ln 3 - 5}{8}$ (Μονάδες 4)