

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.
ΘΕΜΑ Α:

A1] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ(Σωστό) ή Λ(Λάθος).

α) Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι άρτια τότε είναι και 1-1.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

δ) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

ε) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

A2] Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

A3] α) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

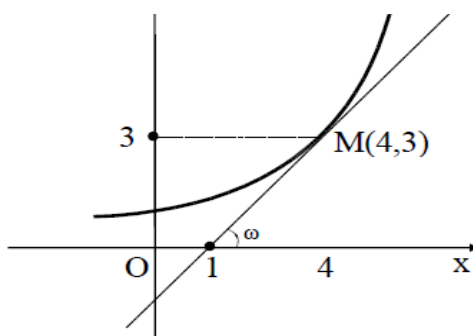
β) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

δ) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

A4] Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ϵ) εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στο σημείο $M(4, 3)$. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:



α) Η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$.

β) Η κλίση της C_f στο σημείο $M(4, 3)$ είναι ίση με .

γ) $f'(4) = \text{}$.

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_0 = 4$ είναι ίσος με .

ε) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \text{}$.



ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
με $f(x) = x^2 + 5x - 2a + 10$ και $g(x) = 2x - x^2 - b - 3$
για τις οποίες ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

B1 / Υπολογίστε τις $f'(x)$, $g'(x)$ (Μονάδες 5)

B2 / Να αποδείξετε ότι $a=2$ και $b=3$ (Μονάδες 6)

B3 / Για $a=2$ και $b=3$ να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (Μονάδες 7)

B4 / Λύστε την εξίσωση $(f \circ g)(x) = \sqrt{100} \cdot x - x^2 + e^{\ln 6}$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει
ότι $f(A) = \mathbb{R}$ και $f^3(x) + f(x) = 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1 / Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 (Μονάδες 7)

Γ2 / Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} , αφού διαπιστώσετε
την ύπαρξη της και έπειτα λύστε την εξίσωση $f(x) = x$ (Μονάδες 9)





Γ3 / Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2}$
όπου $g(x) = f^{-1}(x)$ (Μονάδες 4)

Γ4 / Υπολογίστε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(5+h) - 129}{h}$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1 / Να βρείτε την $f'(x)$ και να αποδείξετε ότι $f'(x) \leq 1$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

Δ2 / Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις :

$$g(x) = (x-1)^3 + x \text{ και } h(x) = \ln x$$

i) Να αποδείξετε ότι $g'(x) \geq \ln^2 x + \sin^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
και υπολογίστε την τιμή $g''(2)$. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $h \circ f$ (Μονάδες 4)

iii) Λύστε στο $\mathbb{R}$ -ξοξ, την εξίσωση $h(f(x^2)) - h(f(x^4)) = x^2(x^2-1)$ (Μονάδες 5)

Δ3 / Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(x^2)}{x-2}$ (Μονάδες 4)

