

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α:

Α1] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f , χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε υποχρεωτικά το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

δ) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D_f$, τότε η C_f δεν έχει εφαπτόμενες παράλληλες στον άξονα $x'x$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγισίμη στο $[0, +\infty)$

(10 Μονάδες)

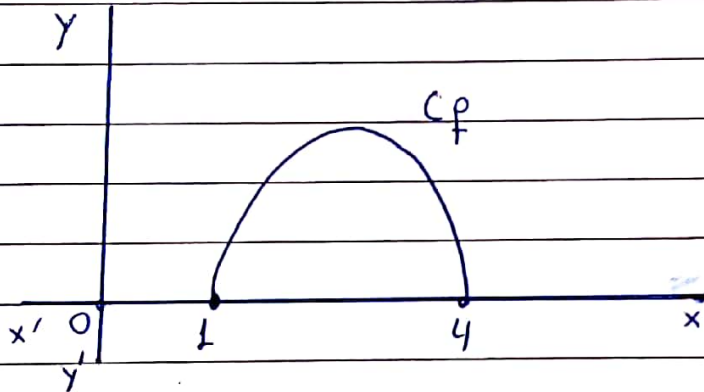
A2] Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$.

α) Πότε η f είναι συνεχής στο $[a, b]$;

β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Βολζανο και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 4)

A3] Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Αληθείς ή Ψευδείς την καθεμία.

α) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f}$ είναι $[1, 4]$

β) Ισχύει το Θεώρημα Rolle στο $[1, 4]$

γ) Υπάρχει σημείο της cf που η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

δ) Οι εφαπτομένες της cf έχουν θετική κλίση.

(Μονάδες 6)

A4] Έστω $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη $\epsilon_{\mathcal{C}}$ της f στο σημείο $M(2, f(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°

B1] Βρείτε τον αριθμό α (5 Μονάδες)

B2] Για $\alpha = -7$, βρείτε την εξίσωση ϵ' της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$, που είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$(\mathcal{J}): y = 5x - 2022$$

(5 Μονάδες)

B3] Βρείτε τα σημεία τομής K, Λ , της ϵ' με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(5 Μονάδες)

B4] Υπολογίστε το εμβαδό του τριγώνου $\triangle OK\Lambda$ με O , την αρχή των αξόνων.

(4 Μονάδες)

B5] Δίνεται συνάρτηση:

$$g(x) = 2x^3 + x^2 + f(x) + x - 6\ln x + 1, \quad x > 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ τέτοιο ώστε η $\epsilon_{\mathcal{C}_g}$ στο $A(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^2 - 3|x| + 2$.

Γ1] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) στο διάστημα $(0, 2)$. (Μονάδες 6)

Γ2] Να δείξετε ότι υπάρχουν x_3, x_4 τέτοια ώστε $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. (Μονάδες 4)

Γ3] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\ln x}{x - x_1} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x - x_2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο (x_1, x_2) . (Μονάδες 8)

Γ4] Για $x > 0$ έστω σημείο $M(x, f(x))$ που κινείται στη C_f με την τετμημένη να μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης την $t = t_0$ για το σημείο M , που περνάει από το A με τετμημένη $x(t_0) = 2$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



Δ1] Να βρείτε την εcf στο σημείο $A(0, f(0))$
(Μονάδες 6)

Δ2] Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x f(x)] \quad (\text{Μονάδες 6})$$

Δ3] Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$(\xi^2 - \xi) \cdot f'(\xi) = (1 - 2\xi) \cdot f(\xi) \quad (\text{Μονάδες 7})$$

Δ4] Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = x \cdot f(x) + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -(x+a)^2, \quad \text{με} \quad x \neq 0$$

Αν η εφαπτομένη Έch στο σημείο $A(1, h(1))$
εφάπτεται και στη Cg , να βρείτε το a καθώς
και το σημείο επαφής της ϵ με τη Cg .

(Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

