

Μαθηματικά Ο.Π Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

3^ο Διαγώνισμα
2022-2023

by "infomath-anelixis"

Α4] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

- α) Αν $n \notin$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
- β) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{p(x)}{q(x)}$ με βαθμό $p(x)$ ίσο με το βαθμό του παρονομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
- γ) Αν η πολυωνυμική f έχει δύο ρίζες, τότε η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.
- δ) Αν για τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.
- ε) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' η f έχει το πολύ μία ρίζα.

(10 μονάδες)



A2] Να διατυπώσει το Θεώρημα Rolle και τη συνθήκη του ερηνεία.

β) Ποτε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα $[a, b]$;

γ) Ποτε λέμε ότι η ευθεία $\chi = \chi_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

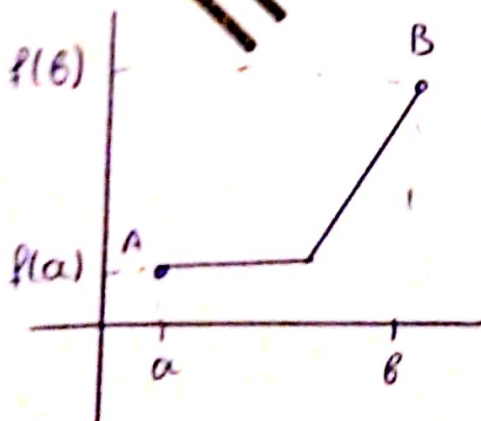
(6 μονάδες).

A3] Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ .
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(6 μονάδες).

A4]



Για τη συνάρτηση που παριστάνει η f διηλθ, δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[a, b]$, διότι:

- A. Δεν είναι συνεχής στο (a, b)
- B. Δεν είναι συνεχής στο $[a, b]$





- Γ. Δεν είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) .
Δ. Δεν ισχύει $f(a) = f(b)$

(3 μονάδες).

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + a, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1] Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής. (5 μονάδες)

B2] Για $a = 1$, να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\frac{1}{2}, 4]$.

B3] Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την $y = -\frac{1}{4}x + 2019$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά. (7 μονάδες).

B4] Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (7 μονάδες).





Γ ΘΕΜΑ:

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu 2x} = 5$

- $f(2) = 2$

- $f''(x) \neq 0, \forall x \in (0, 2)$

Να δείξετε ότι:

Γ1] $f(0) = 0$ (5 μονάδες)

Γ2] $f'(0) = 10$ (6 μονάδες)

Γ3] Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 2)$. (5 μονάδες)

Γ4] Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$. (5 μονάδες)

Γ5] Υπάρχει $\kappa, \lambda \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa) \cdot f'(\lambda) = 1$. (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ:

- Δ1] Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Αν η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$ διέρχεται από τα $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$ ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6 \quad (10 \text{ μονάδες})$$

- Δ2] Δίνεται η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με:
- $$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \cdot f'(x) \quad \text{με } b > a, \text{ η οποία είναι συνεχής στο } [a, b], \text{ παραγωγίσιμη στο } (a, b) \text{ και ισχύει:}$$
- $$f(a) = f(b) = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση}$$
- $$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ ικανοποιεί το Θεώρημα Rolle στο } [a, b] \quad (9 \text{ μονάδες})$$

- Δ3] Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\zeta \in (a, b)$ ώστε τα σημεία $A(f(\zeta), \zeta)$, $B(f'(\zeta), 1)$ και $O(0, 0)$ είναι συνευθειακά. (6 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!