

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Α] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με
 Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε
κάθενα από τα διαστήματα στα οποία οι δια-
δοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού
της.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0
του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγι-
στη στο σημείο αυτό.

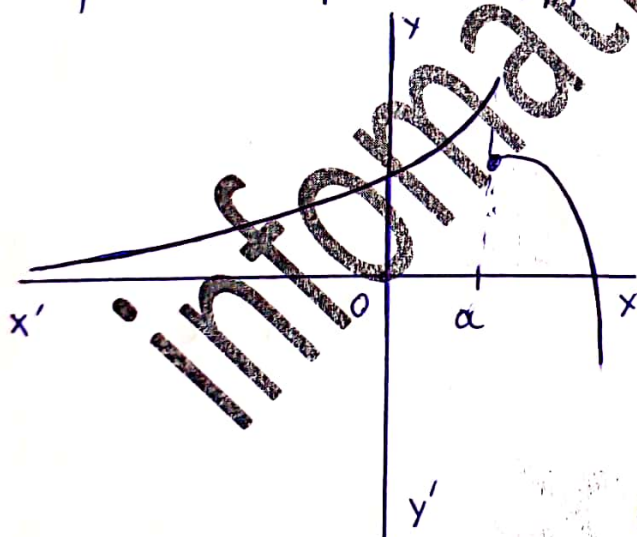
γ) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα
 Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για
κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε $f(x) = g(x)$ για
κάθε $x \in \Delta$.

δ) Έστω μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και
παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ,
τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Ε) Έστω f συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ . (Μονάδες 10)

A2] Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . (Μονάδες 6)

A3] Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις.



α) Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$

β) Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = \underline{\hspace{2cm}}$

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \underline{\hspace{2cm}}$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ και $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

ε) Η f έχει δύο ασύμπτωτες με εξισώσεις $\underline{\hspace{2cm}}$ και $\underline{\hspace{2cm}}$.



A4] α) Αν τα μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο x_0 .

β) Τι λέμε παράγωγο μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x+\alpha)^2, & x \geq 1 \end{cases}$ όπου $\alpha \neq 0$.

B1] Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ (4 μονάδες)

B2] Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα Rolle για την f στο $[0, 2]$. (7 μονάδες)

B3] Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία εφαπτομένη είναι κάθετη στην $y = -\frac{1}{3}x + 2023$. (6 μονάδες)

B4] Να μελετήσετε την f ως προς την μονotonία και τα ακρότατα. (8 μονάδες).



ΘΕΜΑ Γ:

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση
ώστε για κάθε $x > 1$, να ισχύει:

$$x \cdot f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f(e) = 1.$$

Γ1] Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$
είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 6)

Γ2] Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, να αιτιολογήσετε ότι η ευθεία
που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και
 $B(e, 1)$ εφαπτεται στη f στο B . (Μονάδες 6)

Γ3] Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x} \quad (\text{Μονάδες 7})$$

Γ4] Να βρείτε τη μονοτονία της f . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f'(x) \cdot e^{x+f(x)} = 2x - x^2$$

και η γραφική παράσταση της f , να διέρχεται από
το σημείο $A(1, -1)$.

Δ1] Να αποδείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$. (Μονάδες 8)

Δ2] Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασυμπτώτες της. (Μονάδες 6)

Δ3] Να λύσετε την εξίσωση:

$$2 \ln \frac{x^2+2}{x^2-2x+3} = 2x-1.$$

(Μονάδες 6)

Δ4] Να βρείτε το πλήθος ριζών της $f(x) = 1$. (Μονάδες 5)

Διευκρινίσεις Δ-Θέμα:

Δ1: Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

Δ2: Βρίσκετε καυσόγια και σύνολο τιμών στα επιμέρους διαστήματα και ασυμπτώτες.

Δ3] Κάνετε πράξεις και προσπαθήστε να σχηματίσετε την εξίσωση $f(x^2+2) = f(x^2-2x+3)$
 $\xrightarrow{h \neq 0}$
 $\xrightarrow{1-1}$ $x^2+2 = x^2-2x+3.$

Δ4] Πάιρνω για κάθε διάστημα μονοτονίας σύνολο τιμών. Ελέγχω αν $1 \in f(A)$.