

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ Λυκείου (5^ο Διαγώνισμα)**ΘΕΜΑ Α**

A.1] Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0)=0$$

(Μονάδες 6)

A.2] Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ). Στη συνέχεια να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f''(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ »

(Μονάδες 4)

A.3] Να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

β) Τι ονομάζουμε σημείο καμπής μίας συνάρτησης f ;

γ) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω;

(Μονάδες 5)

A.4] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

α) Αν μια συνάρτηση f , παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της.

β) Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α,β]$ και σημείο $x_0 \in [α,β]$, στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντοτε ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f , είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f''(x)>0$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν η f είναι κυρτή, τότε η εφαπτομένη σε ένα σημείο της c_f , βρίσκεται πάνω από τη καμπύλη της συνάρτησης, εξαιρουμένου του σημείου επαφής.

ε) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ , μπορεί να είναι και άκρα του Δ .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$, $x \in \mathbb{R}$.

B1] Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α , β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 3)

B2] Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

B3] Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

(Μονάδες 6)

B4] Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f .

(Μονάδες 5)

B5] Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $0 < a \neq 1$

Γ.1] Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

(Μονάδες 4)

Γ.2] Να αποδείξετε για $a=e$, ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(Μονάδες 4)

Γ.3] i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

ii) Αν $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

(Μονάδες 7)

Γ.4] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ.1] i) Να μελετήσετε την f , ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = (e^x - 1)e^{1+x-e^x}$. (Μονάδες 2)

iii) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης c_f . (Μονάδες 3)

Δ.2] Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης c_f .

(Μονάδες 5)

Δ.3] Να βρείτε την εφαπτομένη της c_f στο σημείο καμπής.

Έπειτα να αποδείξετε ότι $f(x) + x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(Μονάδες 6)

Δ.4] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\ln \frac{1}{2}}^0 f'(x)dx$ (Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία!!!