

Μαθηματικά Ο.Π Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

6^ο Διαγωνισμός
2022-2023
by infomath anelaxis

Τα θέματα Β, Γ, Δ προέρχονται, με μικρές παραλλαγές, από βιβλίο του Βασίλη Παπαδάκη

ΘΕΜΑ Α:

Α1] Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, b) .
(Μονάδες 6)

Α2] α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παραστήγει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο.

β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Βολζανο και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

γ) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι υποφέρεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ ;
(Μονάδες 9)

A3] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α) Ισχύει $(a^x)' = x a^{x-1}$, $a > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

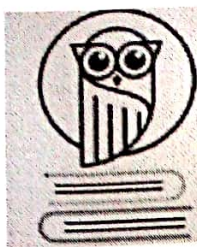
β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f στο διάστημα Δ .

γ) Ισχύει $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$.

δ) Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

ε) Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ με $a, b \in \mathbb{R}$
για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = -3$$

B1 | Βρείτε τους αριθμούς a και b (Μονάδες 5)

για $a = -3$ και $b = 4$

B2 | Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία και
την κυρτότητα. (Μονάδες 6)

B3 | Αν x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει
τοπικά ακρότατα και x_3 είναι το σημείο στο οποίο παρουσιάζει
ισομηνή, να αποδείξετε ότι τα σημεία
 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$
είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

B4 | Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f
στο σημείο $M(-1, f(-1))$ (Μονάδες 4)

B5 | Υπολογίστε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{e^{f(x)} - e^{9x+9}}$ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ Γ :

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

$$f''(2) = \frac{7}{4} \text{ και } x^2 f'(x) - 2x f(x) = 3, \text{ για κάθε } x > 0$$

Γ1 / Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο $M(2, f(2))$. (Μονάδες 5)

Γ2 / Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ (Μονάδες 5)

Γ3 / Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 4)

Γ4 / Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)}$ (Μονάδες 5)

Γ5 / Λύστε την εξίσωση $f(x^5) = f(x^6) + \ln x$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ :

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με $f(\sqrt{3}) = 2$, για την οποία ισχύει ότι :

$$\frac{2xf(x)}{x^2+3} = -f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ1 | Βρείτε τον τύπο της f και έπειτα μελετήστε την μονotonία και τα ακρότατα της. (Μονάδες 8)

Δ2 | Μελετήστε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f και να βρείτε τις ασύμπτωτες της. (Μονάδες 7)

Δ3 | Να σχεδιάσετε την f . (Μονάδες 4)

Δ4 | i) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{x}{6} \cdot f(x)$

Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείουν οι C_h , ο x' και οι ευθείες $x=1$ και $x=2$

ii) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ' την C_g και την ευθεία $x=12$ και την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Μονάδες 6)