

Μαθηματικά Γ' ΕΠΑ.Λ

1^ο Διαγωνισμός 2023-24
by infomath anelxis

Καρδίτσα: 05/11/2023

Θέμα Α:

A1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 2x$. (Μονάδες 6)

A2 Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, στο x_0
του πεδίου ορισμού της; (Μονάδες 6)

A3 Συμπληρώστε τα κενά

i) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots$

ii) $(\sqrt{x})' = \dots$

iii) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \dots$

(Μονάδες 3)

A4 Εκφράστε με Σ ή Π :

- i) Ένα σημείο $M(a, b)$ ανήκει στη καμπύλη C_f , αν $f(b) = a$
- ii) Σε μία συνάρτηση, ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

iii) Ισχύει ότι $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

iv) Η $f(x) = |x|$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.

v) Μια συνεχής συνάρτηση στο x_0 , είναι οπωσδήποτε και παραγωγίσιμη στο x_0 .
(Μονάδες 10)

Θέμα Β: (Μπιλιούσης Σπύρος)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1$

B1 Βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$. (Μονάδες 4)

B2 Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) + f'(x) - 17}{5x^2 - 10x}$, (Μονάδες 6)
ισούται με $\frac{19}{5}$

B3 Υπολογίστε την παράσταση

$$A = (-1)^3 + f''(0) - 15^0 + (6 \cdot 4 - 5^2)^{17} + f'(-1) + 5f(2)$$

(Μονάδες 6)

B4 Υπολογίστε τα όρια

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ (Μονάδες 4)

ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h^2 + h}$ (Μονάδες 5)

Θέμα Γ: (Παραλλαγή άσκησης από Τάσο Μπαρλα)

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ a - 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{και } g(x) = x^3 + x + a - 2$$

Γ₁ | Να βρείτε το a , ώστε η συνάρτηση f , να είναι
συνεχής στο $x_0 = 1$ (Μονάδες 8)

Γ₂ | Για το a που βρήκατε στο (Γ₁), υπολογίστε το όριο
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{1 - x}$ (Μονάδες 6)

Γ₃ | Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{\sqrt{x+3} - 2}$ (Μονάδες 6)

Γ₄ | Έστω η συνάρτηση $h(x) = g(x-1)$

i) Προσδιορίστε τον τύπο της $h(x)$. (Μονάδες 3)

ii) Βρείτε την παράγωγο $h'(x)$. (Μονάδες 2)

Θέμα Δ: (Εμπλουτισμός θέματος από Χριστόφορο Παπαγεωργίου)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{a}{3}x^2 + 4x - 5$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

με $a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x-1} - 1}$

Δ₁ | Να προσδιορίσετε τον τύπο της f . (Μονάδες 6)

Δ₂ | Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$. (Μονάδες 5)

Δ3 | Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) + f''(x) = 0$
(Μονάδες 6)

Δ4 | Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) - 8}{h + h^2}$$

(Μονάδες 8)

Καλή επιτυχία !!!