

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ον/μο:.....

Ημ/νια:.....

ΘΕΜΑ Α:

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (6 Μονάδες)

A2] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ(Σωστό) ή Λ(Λάθος).

α) Αν $x_0 \in D_f$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 .

γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον x' σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ε) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 10)

A3] α. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{|x-3|}$ είναι ίσο με:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. 5
- ☐ Β. $-\frac{5}{3}$
- ☐ Γ. $-\infty$
- ☐ Δ. $+\infty$
- ☐ Ε. Δεν υπάρχει

Β. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{5}{x-7}$ είναι ίσο με:

Επιλογή μίας απάντησης.

- ☐ Α. 5
- ☐ Β. $-\frac{5}{7}$
- ☐ Γ. $-\infty$
- ☐ Δ. $+\infty$
- ☐ Ε. Δεν υπάρχει

(Μονάδες 3)

Α4]α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 6(2+4))

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = [0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) > 2$ για κάθε $x \in A$
- $f^2(x) + 3 = 4f(x) + x^2$ για κάθε $x \in A$

Β1] Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$. (Μονάδες 4)

Β2] Αν δίνεται $g(x) = \sqrt{x}$ να ορίσετε τη $f \circ g(x)$. (Μονάδες 6)

Β3] Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 8)

Β4] Να αποδείξετε ότι η C_f είναι πάνω από την $y=x$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Γ1] Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 5)

Γ2]Βρείτε τα α, β για τα οποία η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

(Μονάδες 6)

Γ3] Για τα α, β που βρήκατε, ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$; Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσής της;

(Μονάδες 5)

Γ4]Θεωρήστε την συνάρτηση $g(x) = f'(x)x^3 + 4x^2 + \ln(x-1)$

i)Βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της g ($g''(x)=;$).

(Μονάδες 5)

ii)Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x)$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = -2x + 4$ και

$g(x) = ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

Δ1]Να αποδείξετε ότι $4\alpha + 3\beta = 4$. (Μονάδες 4)

Δ2]Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax^3 + \beta x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = l, l \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι

$\alpha = 1$ και $\beta = 0$. (Μονάδες 6)

Δ3]Να υπολογίσετε την τιμή $(f \circ g)'(1)$. (Μονάδες 5)

Δ4]i)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \ln \sqrt{f(x)} - \frac{1}{2} \ln(g(x) + 1)$,

$x \in (1, 2)$ είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 4)

ii)Να ορίσετε την h^{-1} . (Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!