



**infomath
anelaxis**

ΚΟΥΜΟΥΝΔΟΥΡΟΥ 2, ΚΑΡΔΙΤΣΑ

(Μαθηματικά Ο.Π Γ' Λυκείου)

2^ο Διαγωνισμός 2023-24
by infomath anelaxis

Θέμα Α:

A1 Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano (Μονάδες 3)
και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του (Μονάδες 3).

A2 Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα
ενδιάμεσων τιμών. (Μονάδες 9)
(3+6)

A3 Εκφράστε με Σ ή Π :

α) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$
και ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε η f τέμνει τον x - x σε
τουλάχιστον ένα σημείο.

β) Ισχύει ότι $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$

γ) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε
δεν είναι και παραγωγισίμη στο x_0 .

δ) Ισχύει ότι $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ε) Αν s η συνάρτηση θέσης ενός κινητού που κινείται σε ευθύγραμμο
άξονα και a η συνάρτηση της επιταχύνσής του, τότε για κάθε
χρονική στιγμή t , ισχύει $a(t) = s''(t)$. (Μονάδες 10)



**infomath
anelaxis**



Θέμα Β : (Νίκος Σπληνής - παραλλαγή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2+2x-3}{x^2-1}$ και $g(x) = \frac{x^2+3x+\mu}{x}$

B1 / Να βρείτε τις τιμές των λ, μ , αν γνωρίζετε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, είναι πραγματικοί αριθμοί. (Μονάδες 6)

B2 / Αν $\lambda=2$ και $\mu=0$, υπολογίστε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

(Μονάδες 4)

B3 / Για $\lambda=2$ και $\mu=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0
(Μονάδες 6)

B4 / Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Αν $a < b$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$

ώστε : $\frac{P(\xi)}{(\xi-b)^3} + \frac{P(\xi^2)}{(\xi-a)} = 0$

(Μονάδες 9)

Θέμα Γ: (Visari team - παραλλαγή)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 2, & x \leq 1 \\ \ln x + a, & x > 1 \end{cases}$$

Γ₁/ Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f αντιστρέφεται.
Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του a , ώστε να ισχύει αυτό;
(Μονάδες 6)

Γ₂/ Για $a = -1$

- i) Να βρείτε την f^{-1}
- ii) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- iii) Να αποδείξετε ότι $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , στο σημείο $A(1, f(1))$

(Μονάδες 12)
(4+4+2+2)

Γ₃/ Έστω σημείο M που κινείται επί της C_f , για $x > e$ και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό g μονάδες/sec. Αν K και N οι προβολές του M , στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τον ρ.μ. του εμβαδού του ορθογωνίου Εοκμ τη στιγμή t_0 , που το M διέρχεται, από σημείο με τετμημένη 5.
(Μονάδες 7)



Θέμα Δ: (Μπιλιούσης Σπύρος)

Δίνεται η εξίσωση $f'(x) = -3xf(x)$ (1) με $f(0) = f(1) = 0$

Δ1 / Να δείξετε ότι υπάρχει ρίζα $\xi \in (0,1)$ της εξίσωσης (1)
(Μονάδες 6)

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$h(x) = x^3 + 1 \text{ και } k(x) = -x^2 - 4x - 3$$

Δ2 / Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_h και C_k , σε κοινό τους σημείο.
(Μονάδες 4)

Δ3 / Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 2 κοινές εφαπτομένες των C_h και C_k , τις οποίες και να βρείτε.
(Μονάδες 8)

Δ4 / Έστω η συνάρτηση $t(x) = x^3 + h(x) - k(x)$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της t με ω την γωνία που σχηματίζεται με τον $x'x$, οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_t , για $x=3$
(Μονάδες 7)

Καλή επιτυχία !!!