

Μαθηματικά Γ' Λυκείου5^ο Διαγώνισμα 2024-2025
by infomath anelixisΘΕΜΑ Α :

A1 Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θέωρημα Fermat, για συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
(Μονάδες 8)

A2 Εκφράστε με Σωστό ή Λάθος

α) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

β) Για κάθε συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο A με $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$, $\forall x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) > 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (a, b)$, τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ , είναι $f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x))$.

ε) Το ολοκλήρωμα $\int_1^3 x dx$, ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

A3/

α) Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f ;

β) Τι ονομάζουμε πιθανά σημεία ακροτάτων της f ;

γ) Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται κυρτή, σε ένα διάστημα Δ ;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β :

Έστω f , παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

- $f'(x) = -f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$

B1 | Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x \cdot (f(x) - x + 1)$ $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 4)

B2 | Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f , είναι $f(x) = e^{-x} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 4)

B3 | Να μελετήσετε την f , ως προς μονοτονία και ακρότατα (Μονάδες 6)

B4 | Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ (Μονάδες 4)

B5 | Αν $h(x) = \ln x$, να ορίσετε την συνάρτηση $h \circ f$ (Μονάδες 3)

B6 | Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi) = 4 - 2e$ (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ :

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ (Μονάδες 3)

Γ2 | Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία, ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 Έπειτα, βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = k, \quad \forall k \in \mathbb{R}$
 (Μονάδες 8)

Γ3 | Αν για $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $x_1 + x_2 = -1$, να δείξετε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την f , στο $[x_1, x_2]$
 (Μονάδες 5)

Γ4 | Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) \cdot \ln x}{e^{f(x)}}$ (Μονάδες 4)

Γ5 | Δίνεται $h(x) = (ax+b) \cdot e^x, \quad x > 0$. Υπολογίστε οι a και b εάν η h έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$, το $-e$
 Έπειτα υπολογίστε το $\int_3^4 h(x) dx$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ :

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύουν :

$$* f(1) = -1$$

$$* f'(x) \cdot e^{x+f(x)} = 2x - x^2, \forall x > 0$$

Δ1 | Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι
 $f(x) = 2\ln x - x, x > 0$ (Μονάδες 7)

Δ2 | Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία.
 (Μονάδες 4)

Δ3 | Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
 $f(e^x + 1) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(e^x) + f\left(\frac{x+1}{x}\right)$
 έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, +\infty)$ (Μονάδες 8)

Δ4 | Για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι
 $f(n\mu x + 3) + f(x + 2) > f(x + 3) + f(n\mu x + 2)$
 (Μονάδες 6)

Καλή Επιτυχία!!!