

Μαθηματικά Γ' Λυκείου6^ο Διαγώνισμα
2024-25

by infomath anelixis

ΘΕΜΑ Α

A1 | Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες
Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού. (Μονάδες 8)

- A2 | α) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων μακρής
μίας συνάρτησης f , σε ένα διάστημα Δ ; (Μον 2)
- β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη
σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta = [a, b]$; (Μον 3)
- γ) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + b$ λέγεται ασύμπτωτη της
γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f , στο $+\infty$; (Μον 2)

A3 | Να εκφράσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

- α) Η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$ είναι παραγωγίσιμη στο
 $x_0 = 1$.
- β) Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι "1-1" και η γραφική
της παράσταση, έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$,
έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , της οποίας η γραφική παράσταση
διέρχεται από το A .

- δ) Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A_f$, τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη σε αυτό.
 ε) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, αν $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, τότε ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.
 ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, η οποία δεν είναι μηδενιστική παντού σε αυτό, ισχύει $\int_a^b f(x) dx \neq 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$
 και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$

B1 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 5)

B2 Αν δίνεται ότι $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφή της, $(f \circ g)^{-1}(x) = \varphi(x)$. (Μονάδες 8)

B3 Αν $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε την φ , ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

B4 Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος (B3), να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot \ln(1 + \frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases}$

Γ1 Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (Μον 2)
και έπειτα ότι ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο
με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μον 4)

Γ2 Να βρείτε όλες τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν), της C_f .
(Μον 5)

Γ3 Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0 = 0$.
(Μον 3)

Γ4 Να βρείτε το εμβαδόν του κλειστού χωρίου, που περικλείουν
η C_f και η ευθεία (3): $x = -3$ (Μον 5)

Γ5 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι η C_f
είναι κάτω από την διχοτόμο 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου.
(Μον 6)

Θέμα Δ:

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(1)=2, g(1)=0$
- $f'(x) = -\frac{g(x)}{x}$ και $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}, \forall x > 0.$

Δ1 | Να αποδείξετε ότι:

- η συνάρτηση $\frac{f(x)-g(x)}{x}$, είναι σταθερή, για κάθε $x > 0$.
- ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$$

(Μονάδες 8)

Δ2 | Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς μονοτονία, ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή, $\forall x > 0$.

(Μονάδες 7)

Δ3 | Αν ισχύει ότι $f(\omega - \tau) + f(1 + \eta\mu\gamma) = 4$, με $\gamma \in [0, \pi]$ και $(\omega > \tau)$, να υπολογίσετε το ω και γ .

(Μονάδες 4)

Δ4 | Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 e^x \cdot f(x) dx > 5$

(Μονάδες 6)

Καλή Επιτυχία!!!