

Διαγωνισμός Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1^ο Διαγωνισμός 2025-2026

ΘΕΜΑ Α:

A1] Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο x_0 .
 (Μονάδες 7)

A2]

α) Πότε μια συνάρτηση f , είναι συνεχής στο $[a, b]$;
 (Μονάδες 2)

β) Πότε δύο συναρτήσεις f και g , λέγονται ίδες;
 (Μονάδες 2)

γ) Πότε μια συνάρτηση f , ονομάζεται παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$;
 (Μονάδες 4)

A3] Εκφράστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ :

α) Κάθε "1-1" συνάρτηση, είναι και γνησίως μονότονη

β) Λόγεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Για την συνάρτηση $f(x) = a^x$, λόγεται ότι $f'(x) = a^x$ για $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

δ) Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{A}_f$, τότε υποχρεωτικά δεν είναι και συνεχής στο x_0 .

ε) Μια συνάρτηση f , είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{A}_f$, αν και μόνο αν, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β : (ΤΘΔΔ 24991)

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1, x > 0$

B1 / Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
 (Μονάδες 6)

B2 / Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
 (Μονάδες 6)

B3 / Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της f (δηλ την f'').
 (Μονάδες 5)

B4 / Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$.
 Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίδες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f = g$.
 (Μονάδες 8)
 (5+3)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Γ1] Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$,

$$q = g - h, \text{ και } r = g \cdot h$$

(Μονάδες 6)

Γ2] Για τα παράκατω ερωτήματα, θεωρήστε ότι:

$$\ell(x) = \ln x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

Να ορίσετε τη συνάρτηση $\gamma \circ \ell(x)$.

(Μονάδες 5)

Γ3] Να βρείτε τη μονοτονία της r και να λύσετε την εξίσωση:

$$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$$

(Μονάδες 6)

Γ4] Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln 2, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sin x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{με } \lambda > 0$$

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

β) Να δείξετε ότι η K είναι παραγωγισίμη στο $x_0 = 0$ και να αιτιολογήσετε, γιατί η εφαπτομένη της C_K στο $x_0 = 0$, σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον $x'x$ (Μονάδες 8. (6+2))

ΘΕΜΑ Δ:

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(A) = \mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση:

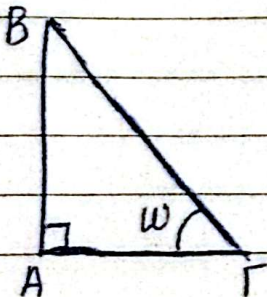
$$f^3(x) + f(x) = 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ1) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} και εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2}$, όπου $g(x) = f^2(x)$.

Δ2) Υπολογίστε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(5+h) - 129}{h}$ (Μονάδες 8) (4+3+1)
(Μονάδες 6)

Δ3) Δίνεται $h(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $AB = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h'(x) - h'(1)}{x-1}$



$$\text{και } A\Gamma = h(3) - h(2) - 2h'''(x) - 1$$

- Υπολογίστε την πλευρά AB (Μον 3)
- Υπολογίστε την πλευρά $A\Gamma$ (Μον 4)
- Υπολογίστε την πλευρά $B\Gamma$ (Μον 2)
- Υπολογίστε $\eta\mu\omega$ και $\epsilon\varphi\omega$ (Μον 2)