

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

2^ο Διαγώνισμα
2025-2026
by infomath anelixis

ΘΕΜΑ Α:

A1/ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$
με $A_f = [0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$, ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και
να εξηγήσετε γιατί στο $x_0 = 0$, δεν είναι παραγωγίσιμη.
(Μονάδες 8)

A2/ α) Να διατυπώσετε το Θέωρημα Bolzano και να
δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. (Μονάδες 4)

β) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο
 x_0 , του πεδίου ορισμού της. (Μονάδες 3)

A3/ Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ:

α) Ισχύει ότι $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

β) Αν για μια συνάρτηση f , ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε η
εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$, είναι παράλληλη στον $x'x$.

γ) Αν για μια συνάρτηση f , δεν ικανοποιείται το Θ. Bolzano στο
διάστημα $[a, b]$, τότε η f οπωσδήποτε δεν έχει ρίζα στο (a, b) .

δ) Λοχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 7} = 0$

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A_f της, τότε υποχρεωτικά και η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη.

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + ax$, $a \in \mathbb{R}$.
Η εφαπτομένη ϵ_{Cf} της f στο σημείο $M(2, f(2))$, σχηματίζει με τον άξονα $x'Ox$, γωνία $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$ rad.

B1 Υπολογίστε τον αριθμό a . (Μονάδες 5)

B2 Για $a = -7$, βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_l της C_f , που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = 5x - 2025$.
(Μονάδες 5)

B3 Βρείτε τα σημεία τομής K, Λ της ϵ_l με τους άξονες $x'Ox$ και $y'Oy$ αντίστοιχα. και έπειτα υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta OK\Lambda$, με O , την αρχή των αξόνων.
(Μονάδες 8)

B4 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = 2x^3 + x^2 + f(x) + x - 6x \ln x + 1, \quad x > 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_g στο $A(x_0, g(x_0))$, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'Ox$.
(Μονάδες 7)



Θέμα Γ:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a \cdot x + b, & x \leq 1 \\ 2ax + 2b - 5, & x > 1 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Γ1 Βρείτε τους αριθμούς a και b , ώστε να ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ (Μονάδες 7)

Γ2 Για $a=2$ και $b=4$

α) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ (Μονάδες 4)

β) Για $x < 1$, εξετάστε αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f , που να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): y = 3x - 4$ (Μονάδες 3)

Γ3 Για $x < 1$, ένα σημείο M κινείται στην C_f και η ταχύτητά του μετράται με ρυθμό 2 μον/sec.

Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σημείου M , από την εφαπτομένη ε του ερωτήματος (Γ2 α), τη στιγμή t_0 , που το σημείο M , διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ (Μονάδες 7).

Γ4 Να βρείτε τιμές του ορίου $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{kx^2 - x + 1}$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 2kx + 1)$

Δ1 | Βρείτε τιμές του k , ώστε να είναι καλά ορισμένη η f , σε όλο το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

Δ2 | Να αποδείξετε ότι για τα k που βρήκατε στο (Δ1), οι εφαπτομένες της C_f στο σημείο με τεταγμένη $x_0 = 0$, έχουν τη μορφή ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O . (Μονάδες 7)

Δ3 | για $k = \frac{1}{2}$, εξετάστε αν ικανοποιείται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ για την f . (Μονάδες 3)

Δ4 | Υπολογίστε το όριο (της $f(x)$ της εκφώνησης)

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2\ln x)$ (Μονάδες 4)

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{f(x)}}$ (Μονάδες 5)