

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.
Γ^ο ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α: (25 μονάδες)

- A1] Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
(Μονάδες 7)
- A2] α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να διατυπώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής.
(Μονάδες 8 (5+3))
- A3] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).
α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγισμένη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.



β) Η γραφική παράσταση μια πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -L.$$

δ) Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0) = \pi$.

ε) Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 είναι μηδέν. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ax^4 - 30x^3 - 35x^2 + bx + 1$$

Η κλίση της f στο σημείο $A(1, -63)$ είναι ίση με -153 .

B1] Να αποδείξετε ότι $a=2$ και $b=-1$. (Μονάδες 6)

B2] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$. (Μονάδες 9)

- 33] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 - 90x^2 - 70x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1] Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
(Μονάδες 4)

- Γ2] Αν η γραφική παράσταση f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(9, 2)$ και $B(4, 3)$, τότε

να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(5 + f(x^2 - 1)) = 2$ (Μονάδες 5)

- Γ3] Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε
 $2g(\xi) + \xi = 0$ (Μονάδες 6)

- Γ4] Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον x 'ς άξονα στο $M(x_0, 0)$ τότε να δείξετε

ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της M , σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.
(Μονάδες 5)

Γ5] Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x = 2 \cdot x$ έχει το πολύ δύο ρίζες.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ:

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση $f^2(x) - 2xf(x) - \sin^2 x = \eta \mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$ με την f συνεχής στο \mathbb{R} και $f(0) = 1$

Δ1] Να δείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, x \in \mathbb{R}$
(Μονάδες 7)

Δ2] Να αποδείξετε ότι:

- i) η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο \mathbb{R} . (Μονάδες 4)
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) + f(-x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$ (Μονάδες 2)

Δ3] Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ με $x \in [-1, 1]$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, h(\xi))$ με

$f \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_h στο M να είναι παράλληλη στον $x'x$. (Μονάδες 4)
ii) Να βρείτε το f . (Μονάδες 1)

Δ4) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$. (Μονάδες 3)

Δ5) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ (Μονάδες 4).

infomath anelaxis

