

Μαθηματικά 0.Π Γ' Λυκείου

4^ο Διαγώνισμα 2025-2026
by infomath anelisis

ΘΕΜΑ Α:

A1 Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 , εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 7)

A2 Σωστό ή Λάθος :

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0 \in \text{ΑΠ}$, τότε είναι και ολοκληρώσιμη.

β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό x ενός διαστήματος Δ , τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, τότε απαραίτητα $f(x_0) = \lambda$.

δ) Αν η f είναι κοίλη στο Δ , τότε απαραίτητα ισχύει $f''(x) < 0, \forall x \in \Delta$.

ε) Αν η f είναι κυρτή, τότε η f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής. (Μονάδες 10)

A3

i) Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Πότε ένα σημείο $x_0 \in \Delta$, ονομάζεται κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f ; (Μονάδες 4)

ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β: (Risari team)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x) + e$

B1 | Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 4)

B2 | Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία. (Μονάδες 6)

B3 | Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (πεδίο ορισμού και τύπο)
(Μονάδες 6)

B4 | Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = e$. (Μονάδες 4)

B5 | Να αποδείξετε ότι $e \cdot \ln(\ln x) + e \leq x$, $\forall x > 1$.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ (Risari team παραπληρωμένο) (Σίρκας Χρήστες)

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} 2x^2 \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -2, \forall x > 0$$

και

$$\bullet \ln x \cdot f(x) - 1 \leq 2x^2 - 3x, \forall x > 0$$

Γ1 | Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{x}, x > 0 \text{ είναι σταθερή.} \\ \text{(Μονάδες 4)}$$

Γ2 Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

Γ3 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 (f(x) - e^x) dx$

(Μονάδες 4)

Γ4 Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της (ρ) , φέρνω κατακόρυφη ευθεία που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο A και μία οριζόντια ευθεία που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο B .

Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε, η περίμετρος του ορθογωνίου $OAMB$ να γίνει ελάχιστη.

(Μονάδες 8)

Γ5 "Αν η f είναι κυρτή τότε και η f' αν είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, είναι κύρτη!"

i) Η παραπάνω πρόταση είναι Αληθής ή Ψευδής;

(Μονάδα 1)

ii) Δικαιολογήστε (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε δεδομένα από την συγκεκριμένη άσκηση) (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ: Κουστέρης Χρήστος (Risari team) - Παραρτηματικό

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^4 + bx + 1$
για την οποία ισχύουν τα εξής:

• Έχει ακρότατο στη θέση $x = -1$

• $\int_0^1 f(x) dx = \frac{16}{5}$

Δ1 i) Να υπολογίσετε τα a και b . (Μονάδες 5)

ii) για $a=1$ και $b=4$, να βρείτε το είδος του ακρότατου
την τιμή του, καθώς και τα διαστήματα μονotonίας της f
(Μονάδες 4)

Δ2 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς 2
ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2 < 0$ (Μονάδες 6)

Δ3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{\eta/x \cdot (x^4 + 4x + 1)}{4} = (x^3 + 1) \cdot \sin x$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2) , όπου x_1, x_2 οι ρίζες της f
απ' το ερώτημα (Δ2)

(Μονάδες 6)

Δ4 Έστω αριθμοί k και λ τέτοιοι ώστε

$$f(2k+1) + f(3\lambda-1) = -4$$

Υπολογίστε τους k και λ .

(Μονάδες 4)

bonus: Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει καθαρά ακέραιες.