

Μαθηματικά 0.11 Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

5^ο Διαγώνισμα
by infomath anelixis
2025-2026

(εφ' όλης της ύλης)

ΘΕΜΑ Α:

A1 Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . (Μονάδες 7)

A2

α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέγεται "1-1"; (Μονάδες 2)

β) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , του πεδίου ορισμού της; (Μονάδες 3)

γ) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, λέγεται ασύμπτωτη της γραμμής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$); (Μονάδες 2)

A3 | Να εκφράσετε με Σ ή Λ , τις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, τότε και $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

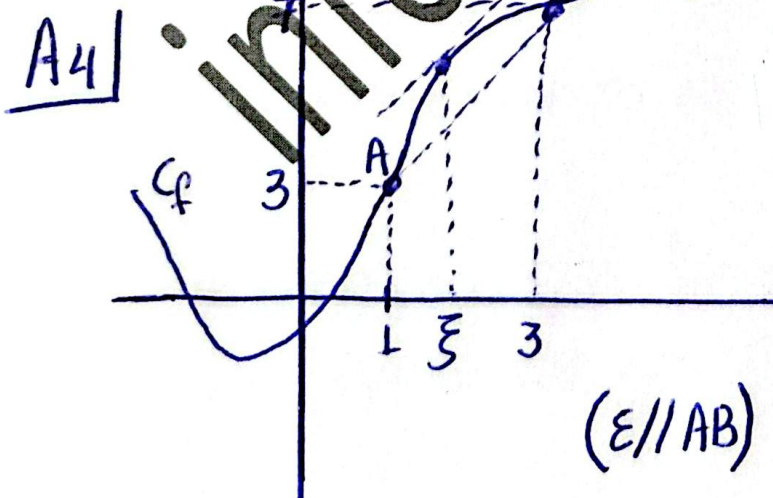
β) Αν η f είναι κοίλη, τότε η C_f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

γ) Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) \neq f(b)$, τότε είμαστε σίγουροι ότι δεν υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

δ) Αν $f(x) > 0 \forall x \in [0, 1]$, τότε ισχύει ότι $\int_1^0 f(x) dx < 0$

ε) Αν μια συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι οπωσδήποτε "1-1".

(Μονάδες 10)



Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ) για την f στο $[1, 3]$ και να υπολογίσετε την τιμή $f'(\xi)$.

(Μονάδα 1)



ΘΕΜΑ Β: (Παπαδάκης Βασίλης)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{e^{2x}}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

B1) Να αποδείξετε ότι $a = -2$
και $b = 1$. (Μονάδες 6)

B2) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f (Μονάδες 4)

B3) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x) dx$ (Μονάδες 4)

B4) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$
με $x_0 < 0$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων

i) Να δείξετε ότι το σημείο επαφής M , έχει τετμημένη
 $x_0 = -1$. (Μονάδες 6)

ii) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείουν
η C_f , η εφαπτομένη της C_f στο M και ο x'
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ: (Lisari team)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

- $f'(x) = x+2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- η γραφική παράσταση της f , διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$

Γ1 / Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι
 $f(x) = e^x + 2x - e$, $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

Γ2 / Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0, 1)$ (Μονάδες 4)

Γ3 / Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{e^x - 1}{f(x)}$, όπου x_0 , η ρίζα του ερωτήματος (Γ2) (Μονάδες 6)

Γ4 / Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 |f(x)| dx$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$$

Δ1 | Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . (Μονάδες 4)

Δ2 | Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 2)

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$, ισούται με $\frac{1}{2}$ (Μονάδες 5)

Δ3 | Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x) dx < 1$ (Μονάδες 6)

Δ4 | Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$ (Μονάδες 3)

Δ5 | Να λύσετε στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση $f(\eta^2 x) + f(\sigma\eta^2 x) = f(\epsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\eta x - \eta^2 x})$

(Μονάδες 5)